OVERZICHT FORMULES

Kansrekening

Voor toevalsvariabelen X en Y geldt: $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$

Voor onafhankelijke toevalsvariabelen X en Y geldt:

$\sigma(X+Y)=\sqrt{\sigma^2(X)+\sigma^2(Y)}$

$\sqrt{n}$ -wet: bij een serie van n onafhankelijk van elkaar herhaalde experimenten geldt voor de som S en het gemiddelde $\overline{X}$ van de uitkomsten X:

$E(S)=n\cdot E(X) \qquad \sigma(S)=\sqrt{n}\cdot\sigma(X)$

$E(\overline{X})=E(X) \qquad \sigma(\overline{X})=\dfrac{\sigma(X)}{\sqrt{n}}$

Binomiale verdeling

Voor de binomiaal verdeelde toevalsvariabele X, waarbij n het aantal experimenten is en p de kans op succes per keer, geldt:

$\mathrm{P}(X=k)=\binom{n}{k}\cdot p^k\cdot(1-p)^{n-k}$ met k = 0, 1, 2, 3, …, n

Verwachting: $E(X)=n\cdot p$ Standaardafwijking: $\sigma(X)=\sqrt{n\cdot p\cdot(1-p)}$

Normale verdeling

Voor een toevalsvariabele X die normaal verdeeld is met gemiddelde μ en standaardafwijking σ geldt:

$Z=\dfrac{X-\mu}{\sigma}$ is standaard-normaal verdeeld en $\mathrm{P}(X<g)=\mathrm{P}(Z<\dfrac{g-\mu}{\sigma})$

Logaritmen

regel	**voorwaarde**
${}^g\log a+{}^g\log b={}^g\log ab$	$g>0,\ g\neq 1,\ a>0,\ b>0$
${}^g\log a-{}^g\log b={}^g\log\dfrac{a}{b}$	$g>0,\ g\neq 1,\ a>0,\ b>0$
${}^g\log a^p=p\cdot{}^g\log a$	$g>0,\ g\neq 1,\ a>0$
${}^g\log a=\dfrac{{}^p\log a}{{}^p\log g}$	$g>0,\ g\neq 1,\ a>0,\ p>0,\ p\neq 1$

Wasdrogers

Een wasdroger droogt wasgoed door middel van warme lucht. De meeste wasdrogers gebruiken elektriciteit als energiebron. Voor elektrische apparaten zijn zogenoemde energielabels ingevoerd: deze geven aan hoe zuinig een apparaat is met energie. De energielabels hebben de letters A tot en met G: A betekent zeer zuinig, G zeer onzuinig.
Op de website van een milieuorganisatie worden verschillende wasdrogers met elkaar vergeleken. In tabel 1 staan gegevens van drie wasdrogers: een energiezuinige wasdroger met een A-label en twee veel verkochte “gewone” wasdrogers met een C-label. De **jaarkosten** van een wasdroger zijn de kosten voor het energieverbruik plus de afschrijving. De afschrijving is de waardevermindering van de wasdroger. Bij de berekening van de jaarkosten is men in tabel 1 uitgegaan van de volgende veronderstellingen:

- Een kilowattuur (kWh) elektriciteit kost € 0,22.
- Per jaar wordt elke wasdroger voor 210 droogbeurten gebruikt.
- Alle wasdrogers hebben een levensduur van 10 jaar.
- De afschrijving is elk jaar $\frac{1}{10}$ van de aanschafprijs.

tabel 1

wasdroger	prijs	energieverbruik in kWh per droogbeurt (5 kg wasgoed)	jaarkosten (inclusief afschrijving)
wasdroger 1 - warmtepompdroger met A-label	€ 960	1,70	€ 175
wasdroger 2 - luchtafvoerdroger met C-label	€ 400	3,25	€ 190
wasdroger 3 - condensdroger met C-label	€ 500	3,65	...

Wasdroger 1 (met het A-label) is duurder in aanschaf, maar zuiniger in energieverbruik en gerekend over de hele periode van 10 jaar voordeliger. Dit is te zien aan de jaarkosten, die voor deze wasdroger lager zijn.
In tabel 1 zijn de jaarkosten voor wasdroger 3 niet ingevuld.

3p **1** Bereken deze jaarkosten.

In tabel 1 is gerekend met 210 droogbeurten per jaar. Om de jaarkosten te berekenen voor een willekeurig aantal droogbeurten per jaar, kan men voor de eerste wasdroger de volgende formule opstellen:

$$K = 96 + 0,374d$$

Hierin is K de jaarkosten en d het aantal droogbeurten per jaar.

Bij deze formule is men weer uitgegaan van een elektriciteitsprijs van € 0,22 per kilowattuur en een levensduur van de wasdroger van 10 jaar. Bij deze formule gaat men dus uit van een jaarlijkse afschrijving van $\frac{1}{10}$ van de aanschafprijs.

We gaan nu uit van een levensduur van 12 jaar, een jaarlijkse afschrijving van $\frac{1}{12}$ van de aanschafprijs en een elektriciteitsprijs van € 0,26 per kilowattuur. Hierdoor verandert de formule voor K.

3p **2** Geef de nieuwe formule voor K in deze situatie. Licht je antwoord toe.

Op de lange duur is een energiezuinige wasdroger voordeliger, maar de aanschafprijs is hoger. In dit verband wordt het begrip “terugverdientijd” gebruikt. Hiervoor vergelijkt men een energiezuinige wasdroger met een “gewone” wasdroger: een bepaald type veel verkochte wasdroger met C-label. De terugverdientijd is de periode die het duurt voordat de hogere aanschafprijs van deze energiezuinige wasdroger ten opzichte van de “gewone” wasdroger is terugverdiend via besparing op de energiekosten.

In tabel 2 wordt een bepaalde wasdroger met een A-label vergeleken met een “gewone” wasdroger met C-label.

tabel 2

type wasdroger	**prijs**	**energieverbruik in kWh per droogbeurt**	**aantal droog-beurten per jaar**	**elektriciteits-prijs (euro per kWh)**	**terugverdientijd ten opzichte van wasdroger met C-label**
energiezuinige wasdroger (A-label)	€ 950	1,75	210	0,22	8 jaar
“gewone” wasdroger (C-label)	€ 375	3,35	210	0,22	--

De terugverdientijd van de energiezuinige wasdroger is in deze situatie bijna 8 jaar.

4p **3** Toon dit aan.

De meeste mensen vinden een terugverdientijd van 8 jaar te lang en zullen daarom deze energiezuinige wasdroger niet kopen. Een terugverdientijd van 4 jaar wordt wel acceptabel gevonden.
Een terugverdientijd van 4 jaar kan bereikt worden als de aanschafprijs van de energiezuinige wasdroger in tabel 2 niet € 950 zou zijn, maar lager.

4p **4** Bereken wat deze aanschafprijs dan zou moeten zijn.

Asperges

Vooral in Zuid-Nederland worden asperges als groente geteeld. Uit aspergezaad groeien aspergeplanten en als deze voldoende gegroeid zijn, worden de asperges geoogst.

De prijs van het zaad is € 4500 per kg. Per hectare groeien ongeveer 20 000 aspergeplanten. Hiervoor is ongeveer 750 gram zaad nodig. Een aspergeplant levert in een oogstseizoen gemiddeld twintig asperges. In één kilo gaan gemiddeld tien asperges. De gemiddelde opbrengst van één kilo asperges is € 4.

4p **5** Bereken het verschil van de gemiddelde opbrengst per hectare en de kosten voor het benodigde zaad.

De geoogste asperges worden op basis van kleur en dwarsdoorsnede gesorteerd. In deze opgave bekijken we witte asperges met een dwarsdoorsnede van 10 tot 38 mm. Een aspergeteler heeft in een week in mei 20 000 asperges geoogst en daarna gesorteerd. In tabel 1 staan de aantallen per klasse weergegeven.

tabel 1

klasse	dwarsdoorsnede (in mm)	frequentie
C1	10-<12	1600
B1	12-<16	4000
A1	16-<20	4500
AA1	20-<28	8800
AAA1	28-<38	1100

5p **6** Zet de gegevens uit tabel 1 uit op het normaal waarschijnlijkheidspapier op de uitwerkbijlage en toon daarmee aan dat de dwarsdoorsneden van de geoogste asperges van deze aspergeteler bij benadering normaal verdeeld zijn.

We nemen vanaf nu aan dat we de dwarsdoorsneden van asperges mogen benaderen met de normale verdeling met $\mu = 20{,}1$ mm en $\sigma = 5{,}6$ mm. Zoals in tabel 1 te zien is, verdelen we de asperges in vijf klassen.
We kunnen nu het percentage asperges in klasse AA1 berekenen met behulp van de normale benadering, maar ook met behulp van de gegevens uit tabel 1.

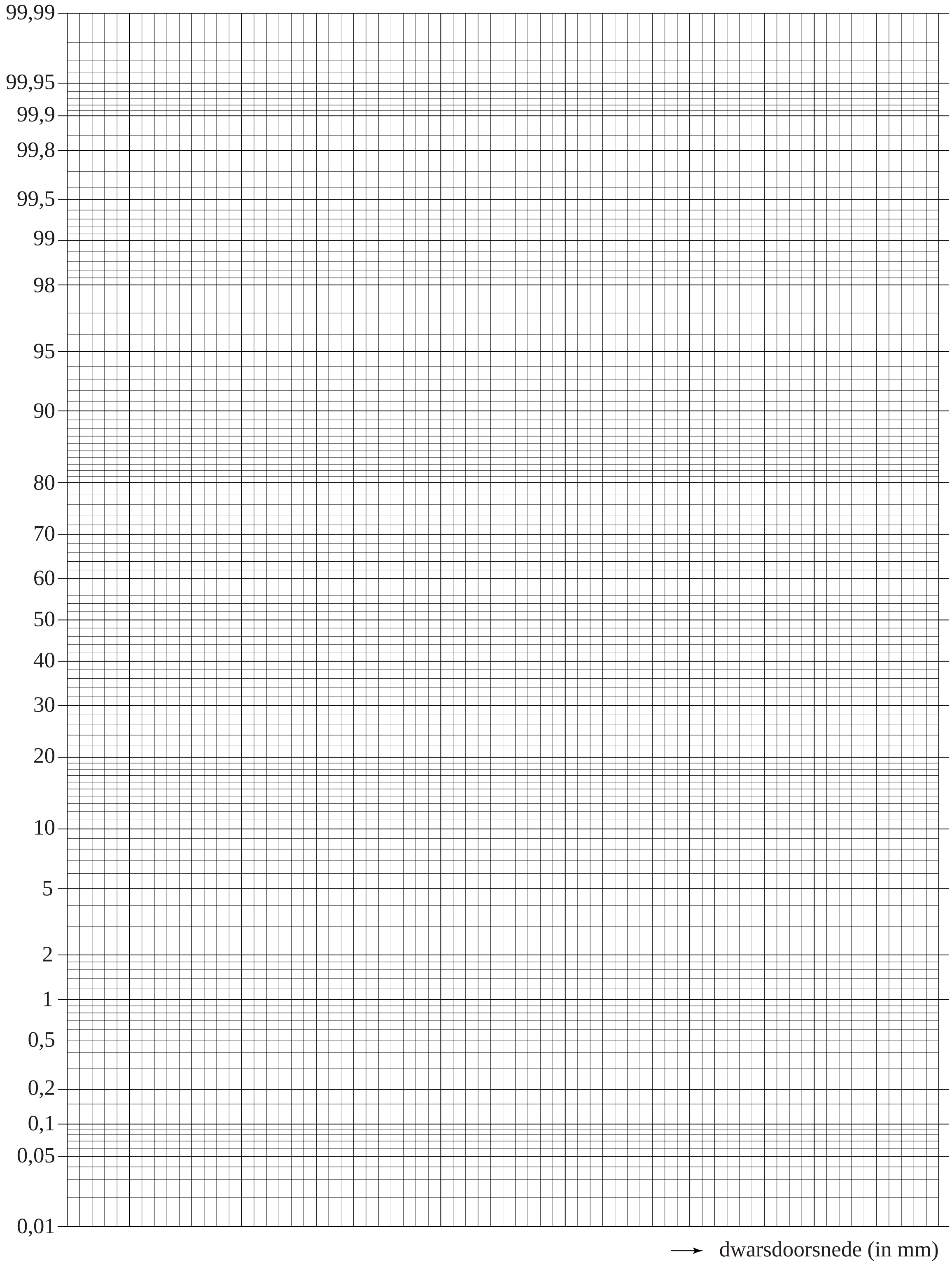
4p **7** Bereken deze beide percentages. Rond je antwoord af op hele percentages.

Op een ochtend oogst een andere aspergeteler 200 asperges. Neem weer aan dat de dwarsdoorsneden van asperges benaderd mogen worden met de normale verdeling met μ = 20,1 mm en σ = 5,6 mm.

5p **8** Bereken hoe groot de kans is dat er van de 200 geoogste asperges minstens 50 in klasse A1 zitten.

uitwerkbijlage

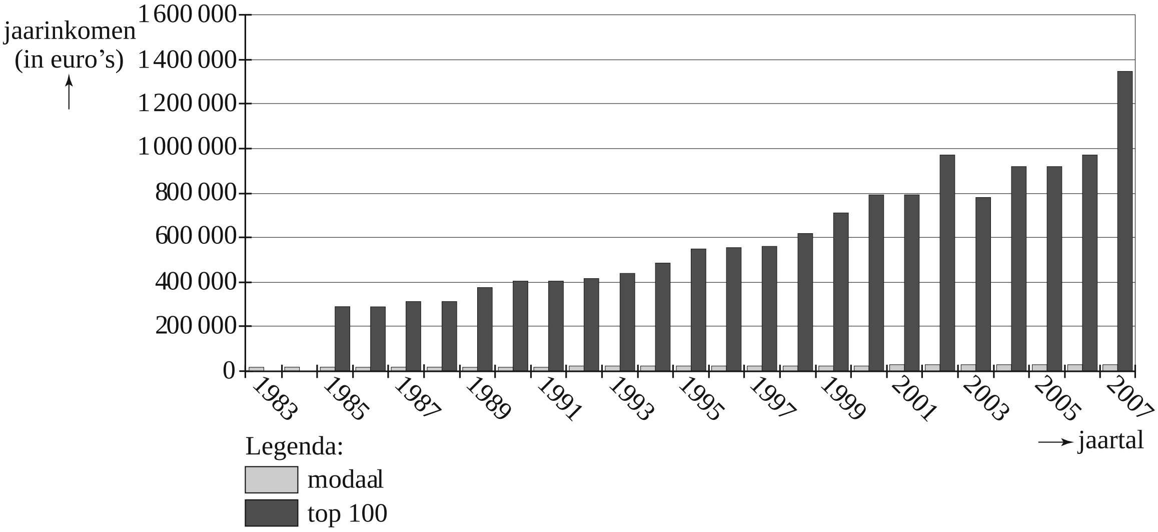
6 Normaal waarschijnlijkheidspapier



Topinkomens

Op 17 mei 2008 stond in de Volkskrant een artikel waarin gesteld werd dat de salariskloof tussen topbestuurders en gewone werknemers in Nederland steeds groter wordt. Bij het artikel was een figuur afgedrukt waarin het gemiddelde van de 100 topinkomens en het modale inkomen in de periode 1983-2007 te zien waren. Zie figuur 1. Alle bedragen in deze figuur zijn jaarinkomens in euro's.

figuur 1

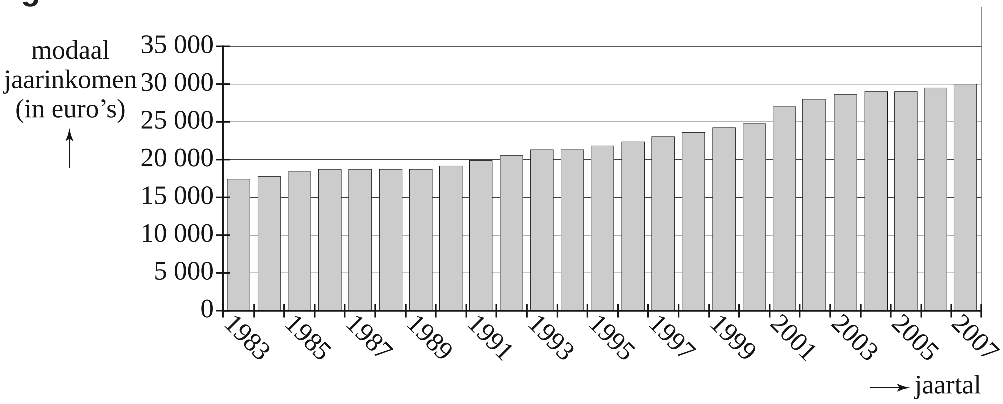


De Volkskrant stelt dat in de periode 1983-2007 de inkomens van topbestuurders elk jaar met gemiddeld 7,2% zijn gestegen. In figuur 1 staan geen gegevens over topinkomens in 1983 en 1984 omdat die toen nog niet openbaar waren.
In 1985 was het gemiddelde van de 100 topinkomens € 295 000.

Uitgaande van het bedrag voor 1985 levert een gemiddelde groei van 7,2% per jaar inderdaad ongeveer het gemiddelde jaarsalaris van de 100 topinkomens op zoals dit in figuur 1 bij 2007 af te lezen is.

4p **9** Bereken dit gemiddelde jaarsalaris en vergelijk je antwoord met het gemiddelde jaarsalaris dat in figuur 1 af te lezen is.

figuur 2



De kleine staafjes van het modale jaarinkomen uit figuur 1 zijn in figuur 2 nogmaals weergegeven. Het modale jaarinkomen is een maat voor het salaris van de "gewone werknemer": veel mensen verdienen een salaris dat rond dit bedrag ligt. In 1983 verdiende een topbestuurder uit de top-100 gemiddeld 16 keer zoveel als het modale inkomen en in 2007 gemiddeld 44 keer zoveel.

4p **10** Toon aan dat het gemiddelde jaarsalaris van de 100 topinkomens in 2007 ongeveer 5 keer zo hoog was als in 1983.

Ook binnen de 100 topinkomens zijn nog grote verschillen. In 2004 was het gemiddelde jaarsalaris van de 100 topinkomens € 910 000. Het gemiddelde jaarsalaris van de 25 hoogste inkomens uit deze groep was € 1 720 000.

4p **11** Onderzoek of de 25 topbestuurders met de hoogste inkomens gemiddeld meer dan drie keer zoveel verdienen als het gemiddelde van de rest van de bestuurders uit deze top-100.

Op de website van de Volkskrant kan iemand laten berekenen hoeveel hij zou verdienen als zijn salaris de afgelopen 25 jaar evenveel gestegen was als dat van topbestuurders. Op de website staat de onderstaande tekst:

tekst 1

> Hoe hoog zou jouw topsalaris moeten zijn?
> Kruip in de huid van een topbestuurder en doe net alsof je salaris in de afgelopen 25 jaar even hard opliep als het inkomen van de hoogste baas. Vul je huidige salaris in en zie wat je eigenlijk had moeten verdienen.
> Voor het gemak is ervan uitgegaan dat je er de afgelopen 25 jaar net als Jan Modaal maar 2,3 procent per jaar aan salarisverhoging bij hebt gekregen, terwijl Jan Top er jaarlijks 7 procent op vooruitging.

Iemand vult voor zijn huidige salaris € 2000 in.

4p **12** Bereken het salaris dat de website als uitkomst geeft.

Zuivere dobbelsteen?

Op de foto zie je twee ronde dobbelstenen. Op deze dobbelstenen staan aantallen ogen van 1 tot en met 6, net als op gewone dobbelstenen. Een ronde dobbelsteen is hol met binnenin een stalen kogeltje. Bij elk getal zit in de holle binnenkant een soort kuiltje waar het kogeltje in past. Aan het einde van een worp komt het kogeltje in zo'n kuiltje terecht. Hierdoor blijft de dobbelsteen liggen, bijvoorbeeld met de vier onder en de drie boven: er is dan drie gegooid.

foto

Iemand vraagt zich af of een ronde dobbelstenen wel zuiver is, dat wil zeggen of voor elk aantal ogen de kans om dat aantal te gooien precies gelijk is aan $\frac{1}{6}$. Om dit te onderzoeken gooit hij 200 keer met een ronde dobbelsteen. De resultaten staan in tabel 1.

tabel 1

aantal ogen	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**totaal**
aantal keren gegooid	43	31	25	26	35	40	200

Er is slechts 25 keer drie gegooid. Dit is minder dan het aantal keren drie dat verwacht mag worden als de kans op drie precies $\frac{1}{6}$ is.

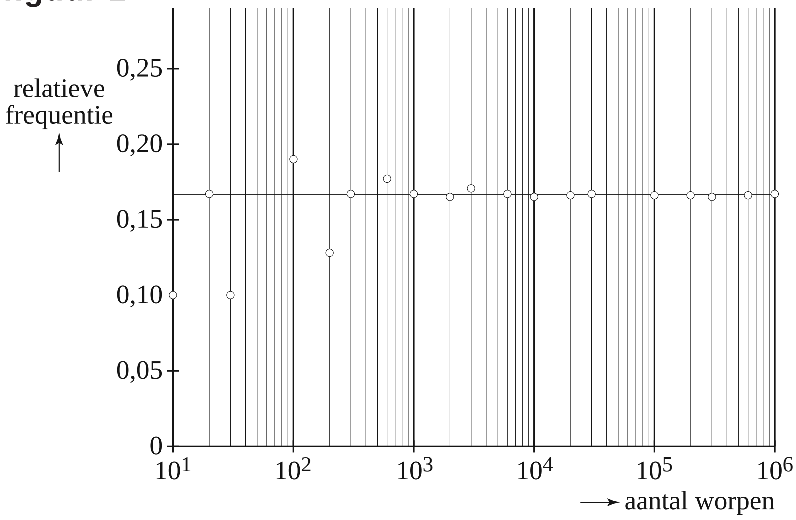
3p **13** Bereken hoeveel procent minder dit is.

Er is 25 keer drie gegooid. Als we aannemen dat de ronde dobbelsteen zuiver is, dus dat de kans op drie precies $\frac{1}{6}$ is, kunnen we berekenen hoe uitzonderlijk dit resultaat is.

3p **14** Bereken de kans om bij 200 worpen met een zuivere dobbelsteen 25 of minder keer drie te gooien.

Om te onderzoeken of een dobbelsteen zuiver is of niet, is het beter om meer dan 200 keer te gooien. Dit wordt geïllustreerd door figuur 1. In figuur 1 is het resultaat te zien van een aantal simulaties van het gooien met een zuivere dobbelsteen. Er werd hierbij alleen gekeken naar het aantal drieën.

figuur 1



Elk cirkeltje stelt het resultaat van een simulatie voor. Langs de horizontale as is het aantal worpen bij een simulatie uitgezet op een logaritmische schaalverdeling. Langs de verticale as staat de relatieve frequentie van het aantal drieën dat hierbij gegooid is. In figuur 1 is bijvoorbeeld te zien dat bij de simulatie van 10 worpen de relatieve frequentie 0,1 is: er is precies één keer een drie gegooid.

Figuur 1 staat ook op de uitwerkbijlage. Bij een simulatie van 60 worpen is 4 keer een drie gegooid.

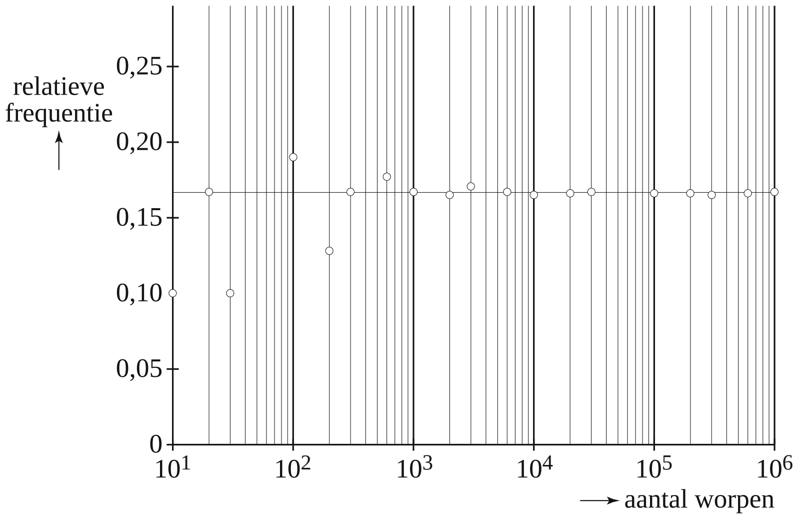
3p **15** Teken het punt dat bij deze simulatie hoort in de figuur op de uitwerkbijlage.
Licht je werkwijze toe.

In figuur 1 is de verwachte relatieve frequentie aangegeven met een horizontale lijn op een hoogte van ongeveer 0,167. Dit komt overeen met kans $\frac{1}{6}$. Het punt dat hoort bij de simulatie van 200 worpen ligt dichter bij deze horizontale lijn dan het punt dat hoort bij de simulatie van 30 worpen. Bij de simulatie van 200 worpen is het verschil tussen de verwachte en de werkelijke relatieve frequentie dus kleiner.
We kunnen ook kijken naar de verschillen bij het **aantal** geworpen drieën. Uit figuur 1 volgt dat er bij een simulatie van 30 worpen 3 keer een drie gegooid is. Het verschil met het verwachte aantal geworpen drieën is 2. Rik beweert dat het verschil tussen het werkelijke en het verwachte aantal geworpen drieën bij de simulatie van 200 worpen kleiner dan 2 is.

4p **16** Onderzoek of Rik gelijk heeft.

uitwerkbijlage

15



Diskos van Phaistos

In 1908 werd bij opgravingen op het Griekse eiland Kreta een bijzondere ontdekking gedaan. De Italiaanse archeoloog Luigi Pernier groef uit een paleis in de stad Phaistos een schijf van aardewerk op, aan weerszijden bedrukt met mysterieuze tekens. Deze schijf, de zogenaamde 'Diskos van Phaistos', is omgeven met raadsels. Waar komt hij vandaan, hoe oud is hij en wat betekenen de mysterieuze tekens die erop staan?

foto

Hierboven zie je een foto van de Diskos. Op deze foto is de diameter van de Diskos (zie de zwarte pijl) ongeveer 5,5 cm. In werkelijkheid is de diameter ongeveer 2,9 keer zo groot.
We nemen aan dat de Diskos cirkelvormig is. Voor de oppervlakte van de Diskos geldt dan de volgende formule:

$$oppervlakte \approx 0,785 \cdot d^2$$

Hierin is d de diameter. De werkelijke oppervlakte van de Diskos is meer dan acht keer zo groot als de oppervlakte van de schijf op de foto.

3p **17** Laat dit zien met behulp van een berekening.

In de wiskunde wordt voor de oppervlakte van een cirkel meestal niet de formule $oppervlakte \approx 0,785 \cdot d^2$ gebruikt, maar de formule $oppervlakte = \pi \cdot r^2$.
Hierbij is r de straal van de cirkel.
De formule $oppervlakte = \pi \cdot r^2$ kun je herleiden tot $oppervlakte \approx 0,785 \cdot d^2$ door gebruik te maken van het volgende:
- $\pi \approx 3,14$
- De straal van een cirkel is de helft van de diameter.

3p **18** Laat zien hoe je de formule $oppervlakte = \pi \cdot r^2$ kunt herleiden tot de formule $oppervlakte \approx 0,785 \cdot d^2$.

Datering
Regelmatig hebben critici zich afgevraagd of de Diskos wel echt is. Met name aan de leeftijd wordt getwijfeld. Een bekende methode om de ouderdom van voorwerpen van aardewerk te bepalen is **thermoluminescentie (TL)**. Bij TL moeten (liefst op een onzichtbare plaats) een aantal kleine cilindertjes uit het aardewerk geboord worden. Dit uitgeboorde materiaal wordt langzaam verhit tot 500 graden Celcius. Hierbij zendt het materiaal een lichtsignaaltje uit dat gemeten wordt: het **TL-signaal**. Hoe ouder het aardewerk, hoe sterker het TL-signaal.
Er geldt de volgende formule voor de ouderdom in jaren:

$$ouderdom = c \cdot TL$$

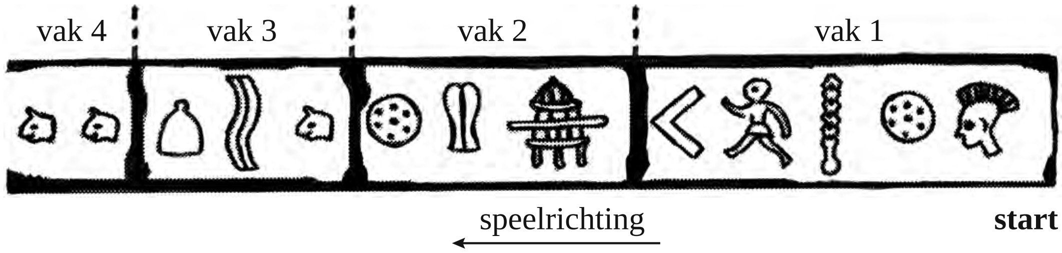
Hierbij is TL het gemeten TL-signaal en c een getal dat onder andere afhangt van de plaats waar het aardewerk is gevonden.

Stel dat voor de Diskos $TL = 2660$ gemeten wordt. Voor een potscherf, die in hetzelfde paleis als de Diskos is gevonden, is gemeten $TL = 1580$. Voor deze potscherf geldt dezelfde waarde van c in de formule als voor de Diskos. Op grond van andere informatie weet men dat deze potscherf ongeveer 2200 jaar oud is.

4p **19** Bereken met behulp van bovenstaande gegevens hoe oud de Diskos dan is.

Betekenis
Volgens de archeoloog Peter Aleff vormen de tekens op de Diskos een bordspel. Volgens hem speelde men er een spel mee door pionnen in een vaste richting over de schijf te laten lopen. Het aantal tekens dat je verder mocht, werd bepaald door het gooien met een gewone, zeszijdige dobbelsteen. Gooide je 1, dan mocht je één teken verder, gooide je 2 dan twee tekens enzovoort.
De tekens op de Diskos zijn verdeeld in vakken. Deze vakken vormen een spiraal die van buiten naar binnen gaat. In vak 1 staan vijf tekens, in vak 2 drie tekens, in vak 3 drie. Zie figuur 1.
In figuur 1 zie je het eerste gedeelte van de baan aan één kant van de Diskos. Het spel wordt gespeeld van rechts naar links. Het is bij dit spel niet mogelijk dat je terug wordt gezet.

figuur 1



We spelen een spel op de Diskos volgens de regels die Peter Aleff beschrijft. Er staat een pion op het eerste teken en er wordt met de dobbelsteen ‘drie’ gegooid. De pion komt dus op het teken ‘lopend mannetje’ in vak 1 terecht.

5p **20** Bereken de kans dat de pion gedurende de rest van het spel **niet** in vak 2 terecht komt.