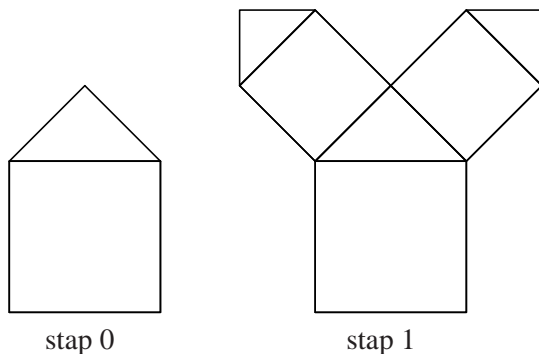


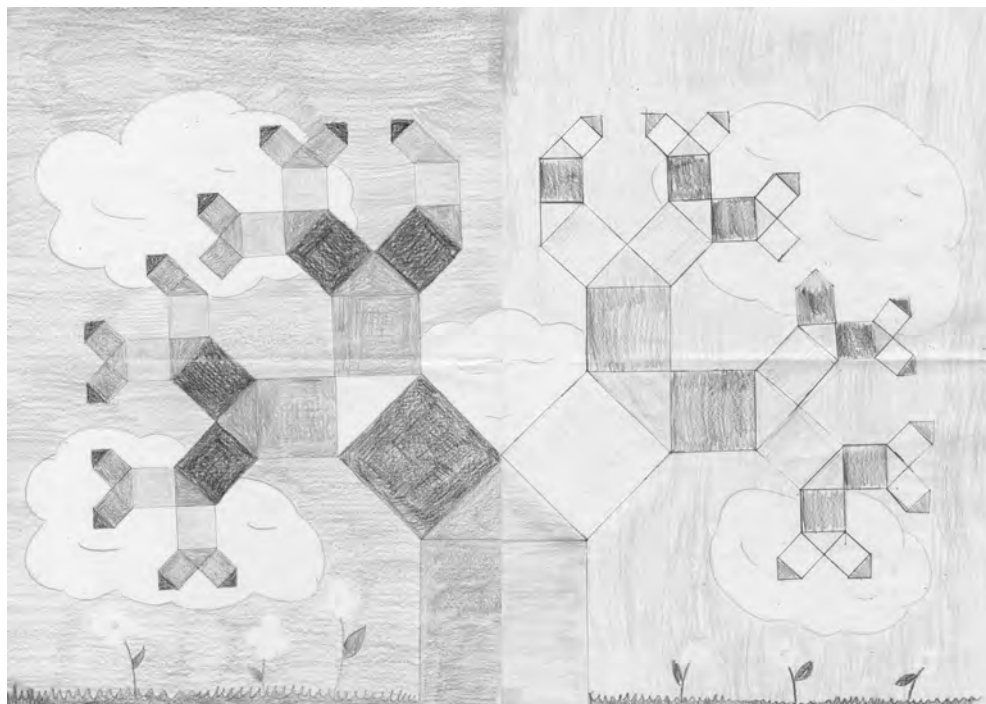
Boom van Pythagoras

Veel mensen hebben weleens de boom van Pythagoras gezien. Deze boom bestaat uit vierkanten en gelijkbenige rechthoekige driehoeken. In figuur 1 staat het begin van zo'n boom en in figuur 2 een door (twee) leerlingen verder uitgewerkte tekening van die boom.

figuur 1



figuur 2



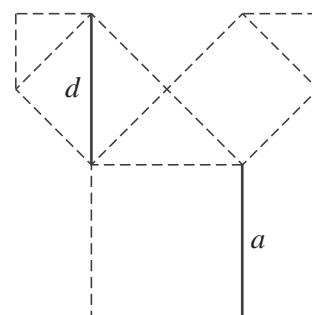
De boom in figuur 2 begint onderaan in het midden van de lange zijde van het papier met een vierkant en daarop een passende gelijkbenige rechthoekige driehoek. Het vierkant en de driehoek samen noemen we stap 0. Bij iedere volgende stap komt er op elke rechthoekszijde van de driehoek steeds een vierkant met daarop weer een passende driehoek bij. Het vierkant past steeds precies op de rechthoekszijde. Zie ook figuur 1.

Je kunt aantonen dat de oppervlaktes van de vierkanten in elke volgende stap half zo groot worden. Anders gezegd: je kunt aantonen dat, als we de oppervlakte van een vierkant a^2 noemen, de oppervlakte van het vierkant in de volgende stap $\frac{1}{2}a^2$ is.

3p 9 Toon dit aan.

Een gevolg hiervan is dat de lengte d van de diagonaal in het vierkant in de volgende stap precies gelijk is aan de hoogte a van het vierkant in de vorige stap. Zie figuur 3.

figuur 3



Hans wil ook een boom van Pythagoras tekenen en begint in het midden van de onderkant van zijn papier met een onderste vierkant van 10 cm bij 10 cm. Hij heeft een vel papier met afmetingen 420 mm bij 594 mm tot zijn beschikking. Hij vraagt zich af of hij wel tot en met stap 5 kan komen met zijn boom. Hij zorgt ervoor dat de zijde van 594 mm de onderkant van zijn tekenpapier is.

4p 10 Onderzoek met een berekening of de hoogte van deze boom van Pythagoras tot en met stap 5 op dit vel past.

De lengtes van de zijden van de opeenvolgende vierkanten vormen een rij waarin elk volgend getal met een vaste factor vermenigvuldigd wordt. Fleur gaat een boom van Pythagoras tekenen. Haar tekenpapier is groot genoeg voor heel veel stappen. Ze begint met een vierkant van 13 cm bij 13 cm. Ze kan geen vierkantje tekenen met een zijde die kleiner dan 1 mm is.

4p 11 Bereken na welke stap Fleur stopt met tekenen.

Bij het tekenen van een boom van Pythagoras wordt het aantal nieuwe vierkanten A bij elke volgende stap verdubbeld. Vandaar dat geldt:

$$A_n = 2^n \text{ met } A_0 = 1 \text{ waarbij } n \text{ het stapnummer is.}$$

Om te bepalen wat het totale aantal getekende vierkantjes tot en met een bepaalde stap n is, kun je een somformule S_n gebruiken.

Als je de getallen uit de rij $b, br, br^2, br^3, \dots, br^n$ op wilt tellen, geldt de somformule die hoort bij een exponentieel verband: $S_n = \frac{b(1-r^{n+1})}{1-r}$

4p 12 Bereken bij welke stap het totale aantal vierkantjes voor het eerst meer dan 2000 is.