Zes gooien

Bij sommige spelletjes moet een speler eerst met een dobbelsteen een zes gooien voordat hij verder mag spelen. Soms gooit zo'n speler al in de eerste worp een zes, maar soms gooit hij bijvoorbeeld pas in de 10e worp een zes.
In onderstaande tabel zie je een begin van een overzicht van de kansen om pas na een bepaald aantal worpen de eerste zes te gooien. Deze kansen zijn afgerond op vier decimalen.

tabel 4

Aantal worpen n	1	2	3	4	…
P(1e keer zes bij n-de worp)	0,1667	0,1389	0,1157	0,0965	…

In de tabel zie je bijvoorbeeld dat de kans om pas in de 4e worp de eerste zes te gooien afgerond 0,0965 is.

4p **18** Bereken de kans om pas in de 7e worp de eerste zes te gooien.

De kansen in tabel 4 vormen een meetkundige rij.
Voor het verband tussen de kansen geldt de volgende recursieve formule:

$$P_n = \tfrac{5}{6} \cdot P_{n-1} \text{ , met } P_1 = \tfrac{1}{6}$$

Hierbij is P_n de kans om de eerste zes te gooien bij de n-de worp.
In plaats van deze recursieve formule kan voor deze rij ook een directe formule worden opgesteld.

3p **19** Geef de directe formule voor P_n.

De verwachtingswaarde E van het aantal worpen dat nodig is om de eerste zes te gooien kan worden berekend met de formule:

$$E = 1 \cdot P_1 + 2 \cdot P_2 + 3 \cdot P_3 + 4 \cdot P_4 + \ldots$$

Deze berekening gaat oneindig ver door. Je kunt de waarde van E benaderen door de berekening na een aantal termen te stoppen. De uitkomst die je krijgt door te stoppen na n termen, noemen we S_n.
Hiervoor geldt dus de formule:

$$S_n = 1 \cdot P_1 + 2 \cdot P_2 + 3 \cdot P_3 + \ldots + n \cdot P_n$$

Berekend kan worden dat $S_{30} \approx 5,8483$.
S_{31} kun je berekenen met behulp van de waarde van S_{30}.

4p **20** Bereken S_{31}.