

## Verhoudingen

In de wiskunde is de volgende rij getallen erg bekend:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots$$

Deze rij getallen staat bekend als de rij van Fibonacci (Pisa, 1170-1250). Elk getal in deze rij is te berekenen door de twee voorgaande getallen op te tellen. In formulevorm ziet dit er als volgt uit:

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \text{ met } u_1 = 1 \text{ en } u_2 = 1$$

Je kunt dit eenvoudig narekenen bij het begin van de rij:

$$2 = 1 + 1$$

$$3 = 2 + 1$$

$$5 = 3 + 2$$

$$8 = 5 + 3$$

enzovoort.

Het is duidelijk dat de getallen in de rij van Fibonacci steeds groter worden.

- 4p **8** Bereken hoeveel getallen in de rij van Fibonacci een waarde hebben tussen 100 en 500.

De rij van Fibonacci heeft veel bijzondere eigenschappen. Zo heeft de rij die je krijgt door steeds de verhouding van twee opeenvolgende getallen uit de rij van Fibonacci te nemen een grenswaarde  $G$ . Het gaat dan om de rij

$\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \frac{13}{8}$  enzovoort. De waarde van deze breuken is op den duur

ongeveer gelijk aan 1,618. Vanaf een zeker moment ligt deze verhouding tussen 1,6180 en 1,6181.

Deze grenswaarde  $G$  is, met name in de kunst, bekend geworden als de **gulden snede**.

- 4p **9** Bereken vanaf welk tweetal opeenvolgende getallen in de rij van Fibonacci de verhouding ligt tussen 1,6180 en 1,6181.

In de 19e eeuw deed Fechner onderzoek naar de esthetische waarde die door velen aan de gulden snede wordt toegekend. Hij liet een aantal mensen rechthoeken zien waarvan de verhouding tussen de lengte en de breedte telkens verschillend was. Aan deze mensen werd gevraagd welke rechthoek zij het mooist vonden. Uit het onderzoek bleek dat rechthoeken waarvan de verhouding van de lengte en de breedte ongeveer de gulden snede opleverde, het meest werden uitgekozen.

Mede op grond van deze resultaten stelde Petrov een formule op waarmee hij deze voorkeur wilde uitdrukken in een getal. Hij noemde dit de **appreciatiewaarde**  $A$  van de rechthoek en kwam met de volgende formule:

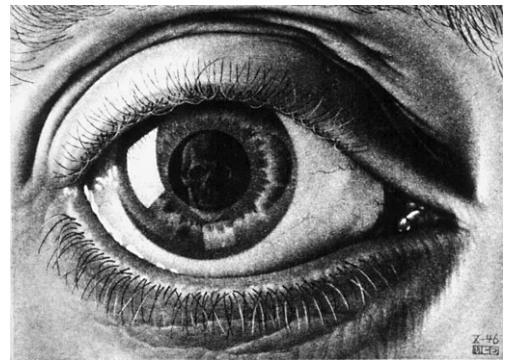
$$A = \left( \frac{1}{v} - 1 \right) \cdot \log \left( 1 - \frac{1}{v} \right)$$

In deze formule is  $v$  de verhouding tussen de langste zijde en de kortste zijde van de rechthoek, dus  $v = \frac{\text{langste zijde}}{\text{kortste zijde}}$ .

**schilderij**



**litho**



De afmetingen van het schilderij 'De Nachtwacht' van Rembrandt van Rijn zijn 363 cm bij 437 cm.

De afmetingen van 'Oog', een litho van M.C. Escher, zijn 141 cm bij 198 cm.

- 3p **10** Bereken welk van deze twee kunstvoorwerpen de grootste appreciatiewaarde heeft volgens de formule van Petrov.

Petrov constateerde dat de verhouding  $v$  tussen de langste en de kortste zijde waarbij de appreciatiewaarde maximaal is, maar weinig verschilt van de waarde 1,618 van de gulden snede.

- 4p **11** Bereken dit verschil.