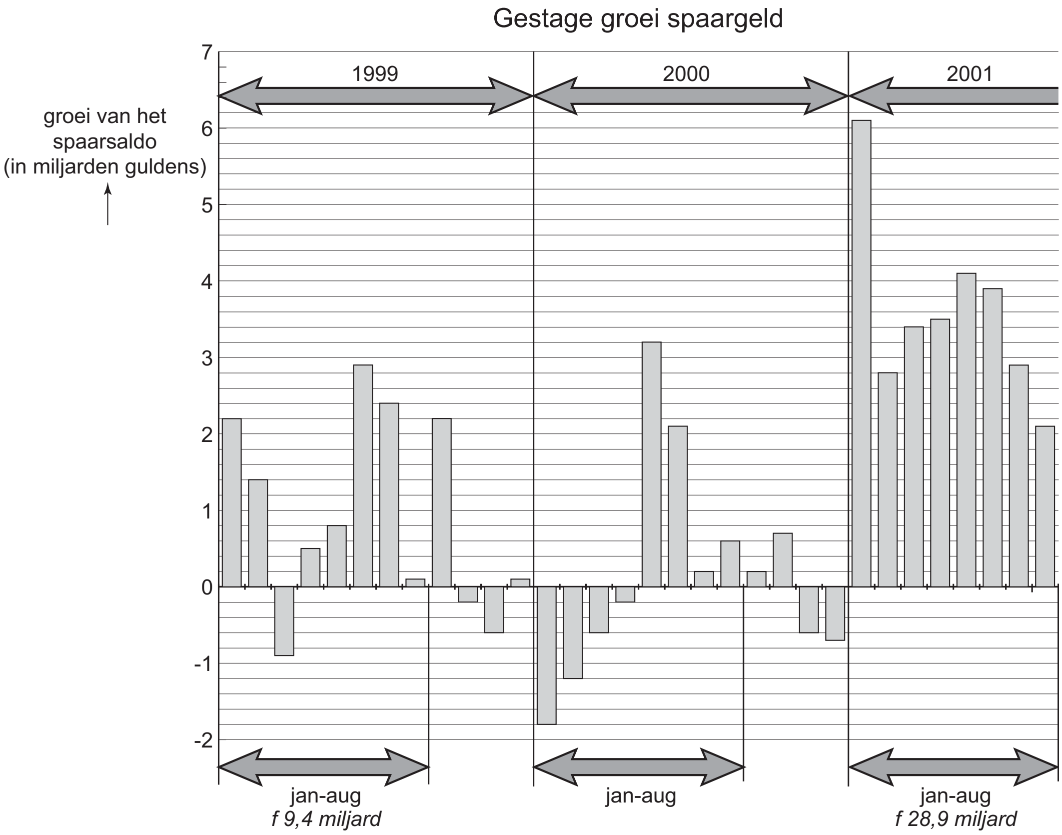
Eindexamen wiskunde A1 vwo 2005-II

Spaarrekeningen

‘Wij blijven maar sparen en sparen’, zo luidde in oktober 2001 de kop van een artikel in de krant. Aanleiding hiervoor was een bericht van het Centraal Bureau voor de Statistiek. Daarin werden gegevens bekend gemaakt over de groei van het spaargeld op de Nederlandse spaarrekeningen. Deze groei ontstaat doordat meer geld op rekeningen gestort wordt dan er afgehaald wordt. In het artikel was figuur 1 opgenomen. De bedragen in deze figuur zijn genoteerd in guldens (f); de gulden was tot 1 januari 2002 de nationale munt in Nederland.

figuur 1



Zoals je onder de grafiek kunt zien, was de groei van het spaargeld in de eerste acht maanden van 2001 (28,9 miljard) ongeveer 3 keer zo groot als in de eerste acht maanden van 1999 (9,4 miljard).
De groei in de eerste acht maanden van 2001 is een flink aantal malen zo groot als de groei in de eerste acht maanden van 2000.

5p **1** ☐ Bereken hoeveel keer zo groot.

Eind augustus 2000 was het totale bedrag aan spaargeld ongeveer 291,5 miljard gulden, bij elkaar gespaard op 25 miljoen spaarrekeningen. In de periode van eind augustus 2000 tot eind augustus 2001 steeg het totale bedrag aan spaargeld met 9,8%. In diezelfde periode steeg het aantal spaarrekeningen met 2,8%.

4p **2** ☐ Bereken met hoeveel gulden het gemiddelde bedrag per spaarrekening in de genoemde periode is toegenomen.

Bij INTERNETBANK kun je alleen maar sparen via een internetrekening. In het begin van het jaar 2000 waren er bij INTERNETBANK 1200 van zulke rekeningen. Vanaf dat moment heeft men bij INTERNETBANK aan het eind van elke maand bijgehouden hoeveel rekeningen er waren. Het aantal rekeningen N, hier aangegeven in honderdtallen, is dan afhankelijk van t, het aantal maanden vanaf het begin van 2000.
Aanvankelijk ging men ervan uit dat N elke maand met 850 zou toenemen. Dan geldt dus de formule:

$$N = 8{,}5t + 12$$

Maar na verloop van tijd bleek de volgende formule een betere benadering te zijn:

$$N = \frac{780}{3 + 62 \cdot (0{,}73)^t}$$

Voor een bepaalde periode voorspelde de tweede formule een groter aantal rekeningen dan de eerste formule.

5p **3** ☐ Hoeveel maanden duurde deze periode? Licht je antwoord toe.

Bij INTERNETBANK realiseerde men zich dat volgens de tweede formule het aantal rekeningen op den duur nauwelijks zou toenemen en een grenswaarde zou bereiken. Men wilde weten na hoeveel maanden het aantal rekeningen minder dan 1% van deze grenswaarde zou afwijken.

5p **4** ☐ Onderzoek na hoeveel maanden dit voor het eerst het geval was.

Macht

Sinds 1 mei 2004 bestaat de Europese Unie uit 25 landen. In de Raad van Ministers heeft elk land één zetel. In deze raad worden veel beslissingen genomen. Daarbij heeft niet elk land evenveel stemmen. Zo heeft Frankrijk 29 stemmen, Nederland 13 stemmen en Denemarken 7 stemmen. Op deze wijze beschikken de 25 landen samen over 321 stemmen. Een land stemt óf voor óf tegen en kan zich dus niet van stemming onthouden of met een deel van zijn stemmen vóór en een ander deel tegen stemmen.
Vaak worden beslissingen genomen bij meerderheid van stemmen. Dat betekent dat een voorstel alleen wordt aangenomen als meer dan de helft van de stemmen voor dat voorstel is. Dan kan het gebeuren dat de stemmen van Nederland de doorslag geven bij het wel of niet aannemen van een voorstel. Dat is bijvoorbeeld het geval wanneer van de overige landen 152 stemmen voor zijn en 156 stemmen tegen.

3p **5** ☐ Bereken bij welke aantallen voorstemmen van de overige landen de stemmen van Nederland de doorslag geven om een meerderheid voor een voorstel te krijgen.

Bij een stemming kan dus één van de partijen soms de doorslag geven. Hoeveel invloed een partij bij de stemming heeft, geven we aan met de *machtsindex (mi)*.
Aan de hand van een voorbeeld laten we zien hoe je die kunt uitrekenen.
We gaan uit van drie partijen A, B en C. Partij A heeft 6 stemmen, partij B heeft 4 stemmen en partij C heeft 3 stemmen. Zij beslissen over een voorstel bij meerderheid van stemmen.
Eén van de mogelijkheden is de volgende: A stemt voor, B stemt voor en C stemt tegen.
Deze mogelijkheid noteren we met (V,V,T).

3p **6** ☐ Hoeveel verschillende mogelijkheden zijn er in totaal?

We gaan nu de machtsindex van één van deze partijen, partij B, berekenen. Daarvoor kijken we alleen naar de mogelijkheden waarbij deze partij voor stemt. Dat levert de volgende mogelijkheden op:

tabel 1

mogelijkheid I	(V,V,V)
mogelijkheid II	(V,V,T)
mogelijkheid III	(T,V,V)
mogelijkheid IV	(T,V,T)

Omdat de partijen samen 13 stemmen hebben, zijn er minstens 7 stemmen nodig voor een meerderheid. Bij de mogelijkheden I, II en III is er een meerderheid voor het voorstel.
Bij de mogelijkheden II en III zijn de 4 voorstemmen van B onmisbaar om een meerderheid te realiseren.
Bij mogelijkheid I zou die meerderheid ook behaald zijn als B niet voor zou stemmen.
Bij mogelijkheid IV is er geen meerderheid.
Omdat de stemmen van B bij 2 van de 4 mogelijkheden doorslaggevend zijn, zeggen we:

$$\textit{de machtsindex van } B = \tfrac{2}{4} = \tfrac{1}{2}$$

We gebruiken dus de volgende definitie van de machtsindex *(mi)* van een partij:

$$mi = \frac{\textit{aantal mogelijkheden waarbij de voorstemmen van die partij doorslaggevend zijn voor de meerderheid}}{\textit{totaal aantal mogelijkheden waarbij die partij voorstemt}}$$

Wanneer er sprake is van vier partijen, zijn er meer mogelijkheden. We nemen de volgende situatie: partij A heeft 7 stemmen, partij B heeft 4 stemmen, partij C heeft 4 stemmen en partij D heeft 2 stemmen.
Ook nu beslissen de partijen bij meerderheid van stemmen.

6p **7** ☐ Bereken de machtsindex van A in deze nieuwe situatie.

We nemen nu een situatie met vijf partijen A, B, C, D en E.
Partij A heeft 3 stemmen en de overige partijen hebben elk 1 stem.

6p **8** ☐ Onderzoek of de machtsindex van A meer dan drie maal zo groot is als de machtsindex van B.

De wet van Benford

In 1881 ontdekte Simon Newcomb een bijzondere eigenschap van sommige reeksen getallen. Hij keek steeds naar het *begincijfer* van de getallen in zo'n reeks en constateerde dat daarbij lage begincijfers veel vaker voorkomen dan hoge begincijfers.
Een voorbeeld van zo'n reeks getallen zijn de beurskoersen die elke dag in de krant verschijnen. De lijst met beurskoersen van vrijdag 10 september 2004 begon met de getallen:

17,75	9,15	5,30	28,07	11,02	6,66	39,67	18,73	1,59	1,53	24,29	41,00
20,37	42,31	6,32	5,03	26,08	19,33	10,77	19,39	50,15	1,54	21,86	13,64

Je kunt hier bijvoorbeeld zien dat bij deze reeks getallen het begincijfer 1 veel vaker voorkomt dan het begincijfer 6 (tien keer tegen twee keer).

In 1938 deed Frank Benford uitgebreid onderzoek naar dit verschijnsel. Hij bekeek onder andere de wateroppervlakte van een groot aantal rivieren. Het resultaat van zijn onderzoek vind je in tabel 2.

tabel 2 **wateroppervlakte van rivieren**

begincijfer	1	2	3	4	5	6	7	8	9
frequentie	104	55	36	38	24	29	18	14	17

Je ziet dat lage begincijfers vaker voorkomen dan hoge.

3p **9** ☐ Bereken in hoeveel procent van de waarnemingen in tabel 2 het begincijfer 1, 2 of 3 is.

Het blijkt dat dit verschijnsel bij veel reeksen van getallen optreedt, bijvoorbeeld ook bij de lengte van rivieren of bij inwoneraantallen van gemeenten.
Benford heeft een formule opgesteld waarmee je in dergelijke situaties de relatieve frequentie van de verschillende begincijfers kunt benaderen. Deze formule, die bekend staat als *de wet van Benford*, ziet er als volgt uit:

$$F(n) = 100 \cdot \log\left(\frac{n+1}{n}\right)$$

In deze formule is $F(n)$ het percentage getallen met het begincijfer n ($n = 1, 2, 3, \ldots, 9$).
Bij getallenreeksen die voldoen aan de wet van Benford zal bijvoorbeeld ongeveer 17,6% van de getallen met het cijfer 2 beginnen, want $F(2) = 100 \cdot \log\left(\frac{3}{2}\right) \approx 17{,}6$. En in ongeveer 60,2% van de gevallen zal het begincijfer 1, 2 of 3 zijn, want $F(1) + F(2) + F(3) \approx 60{,}2$.

Benford heeft aangetoond dat ook de oneindige rij opeenvolgende machten van het getal 2, de rij 1, 2, 4, 8, 16, … , voldoet aan deze wet.
Maar het is de vraag of de wet van Benford ook geldt wanneer je je beperkt tot een beginstuk van deze rij. Om dat na te gaan, tellen we hoe vaak de cijfers 1, 2 of 3 als begincijfer voorkomen bij de eerste twaalf getallen uit deze rij.

4p **10** ☐ Onderzoek of het percentage getallen met begincijfer 1, 2 of 3 bij deze twaalf getallen in overeenstemming is met de wet van Benford.

We bekijken in de rest van deze opgave een reeks getallen die voldoet aan de wet van Benford.

Uit deze reeks kiezen we aselect 160 getallen. Zoals we hierboven hebben gezien, is voor elk van deze getallen de kans dat het begincijfer 1, 2 of 3 is, gelijk aan 0,602.

4p **11** ☐ Bereken in vier decimalen nauwkeurig de kans dat meer dan 100 van deze getallen als begincijfer 1, 2 of 3 hebben.

De getallen die voorkomen in een groot financieel overzicht, voldoen meestal bij benadering aan de wet van Benford. Accountants maken daar tegenwoordig vaak gebruik van om mogelijke fraude bij het opstellen van dergelijke overzichten op te sporen. Zij gaan er daarbij van uit dat het bewust manipuleren van getallen door fraudeurs een andere verdeling van begincijfers oplevert dan de wet van Benford voorspelt. Als bijvoorbeeld 7% van de getallen in een financieel overzicht met het cijfer 9 begint, zal men dit overzicht vrijwel zeker nader onderzoeken. Immers: $F(9) \approx 4{,}6$ en het geconstateerde percentage is ongeveer anderhalf keer zo veel.
Bij het accountantskantoor Levrek & Partners neemt men uit een financieel overzicht een steekproef van 800 getallen. Er zal nader onderzoek worden verricht als het aantal getallen met begincijfer 8 meer dan 20 afwijkt van het door de wet van Benford voorspelde aantal. In de steekproef van 800 worden 62 getallen gevonden met begincijfer 8.

4p **12** ☐ Onderzoek of dit voor Levrek & Partners voldoende aanleiding is voor nader onderzoek.

Bevallen

In het 'Moeders voor moeders babyboek' staat dat 75% van de zwangere vrouwen bevalt tussen 14 dagen vóór en 14 dagen na de uitgerekende datum. Bij het bepalen van deze uitgerekende datum gaat men uit van een zwangerschap van 40 weken, dus 280 dagen.
De zwangerschapsduur is bij benadering normaal verdeeld met een gemiddelde van 280 dagen.
Met behulp van deze gegevens kun je berekenen dat de bijbehorende standaardafwijking, afgerond op één decimaal, gelijk is aan 12,2 dagen.

In 2002 vonden er in Nederland 199 205 bevallingen plaats. Van een aantal van deze bevallingen duurde de zwangerschap minder dan 36 weken.

4p **13** ☐ Bereken bij hoeveel bevallingen dit het geval was.

De standaardafwijking kan nauwkeuriger bepaald worden.

4p **14** ☐ Bereken deze standaardafwijking in twee decimalen nauwkeurig.

Volgens een krantenartikel uit 2000 is hevige zwangerschapsmisselijkheid een voorteken dat er een meisje op komst is. In Zweden is een groot onderzoek gedaan naar vrouwen die wegens zwangerschapsmisselijkheid waren opgenomen in een ziekenhuis. Daarbij bleek 55,7% van de geboren kinderen een meisje te zijn.

Drie vrouwen zijn in het ziekenhuis opgenomen wegens zwangerschapsmisselijkheid.

4p **15** ☐ Bereken de kans dat de drie baby's die uit deze zwangerschappen geboren worden van hetzelfde geslacht zijn.

Sponsorloop

Een school houdt een sponsorloop voor een goed doel. De sponsorloop bestaat uit het lopen van een aantal ronden in een sportpark. Elke leerling die meeloopt, maakt vooraf met ouders en bekenden afspraken over het bedrag dat ze voor elke gelopen ronde aan het goede doel zullen bijdragen.
Er doen 251 leerlingen mee aan de sponsorloop. Na elke ronde wordt genoteerd hoeveel leerlingen die ronde hebben uitgelopen. In tabel 3 staan de gegevens van de sponsorloop. Ga ervan uit dat wie aan een volgende ronde begint, deze ook helemaal uitloopt.

tabel 3

Aantal ronden	Aantal leerlingen
$\geq$ 1	251
$\geq$ 2	250
$\geq$ 3	250
$\geq$ 4	239
$\geq$ 5	200
$\geq$ 6	125
$\geq$ 7	66
$\geq$ 8	43
$\geq$ 9	29
$\geq$ 10	21
$\geq$ 11	14
$\geq$ 12	9
$\geq$ 13	5
$\geq$ 14	2
$\geq$ 15	0

Je kunt in tabel 3 bijvoorbeeld aflezen dat 200 leerlingen de vijfde ronde hebben uitgelopen en dat geen enkele leerling meer dan 14 ronden liep.

4p **16** ☐ Bereken het gemiddelde aantal ronden per leerling.

Joris is een fanatieke hardloper. Hij heeft een schema gemaakt voor de sponsorloop waarbij hij ervan uit gaat dat hij rustig begint en elke ronde steeds 2 seconden sneller loopt dan de voorgaande ronde. De eerste ronde loopt hij in 150 seconden; over de tweede ronde doet hij dus 148 seconden; enzovoort. Voor de rondetijden geldt de volgende formule:

$$t_n = 152 - 2n$$

Hierin is t_n de tijd in seconden voor ronde n.
De totale tijd T_n die Joris over n ronden doet, wordt gegeven door de formule:

$$T_n = 151n - n^2$$

4p **17** ☐ Toon aan dat de formule voor T_n juist is.

De sponsorloop duurt 30 *minuten*.

4p **18** ☐ Bereken hoeveel volledige ronden Joris in die tijd kan afleggen.

Joris wordt gesponsord door zijn ouders. Voor zijn eerste ronde geven zij slechts 0,01 euro, maar voor elke volgende ronde geven zij twee maal zo veel als voor de voorafgaande ronde. Het bedrag in euro’s waarmee zij de n-de ronde van Joris sponsoren noemen we b_n. Er geldt dus:

$$b_n = 0{,}005 \cdot 2^n$$

5p **19** ☐ Bereken hoeveel geld zijn ouders totaal betalen als Joris 13 ronden loopt.