Vraag	Antwoord	Scores

Een derde cirkel

3 maximumscore 4

- In driehoek $M_1M_2M_3$ geldt
  $(r+2)^2 = 8^2 + (r+6)^2 - 2\cdot 8\cdot (r+6)\cdot \cos(\angle M_1M_2M_3)$ 1
- $\cos(\angle M_1M_2M_3) = \dfrac{(r+2)^2 - 8^2 - (r+6)^2}{-2\cdot 8\cdot (r+6)}$ 1
- De teller herleiden tot $-8r-96$ 1
- De rest van de herleiding tot $\cos(\angle M_1M_2M_3) = \dfrac{r+12}{2r+12}$ 1

4 maximumscore 3

- ($\dfrac{r+12}{2r+12} = \dfrac{1+\frac{12}{r}}{2+\frac{12}{r}}$, dus) $\dfrac{r+12}{2r+12}$ nadert tot $\frac{1}{2}$ 2
- ($\cos(\angle M_1M_2M_3)$ nadert tot $\frac{1}{2}$,) dus de limiet is $60°$ 1

of

- (de termen 12 in teller en noemer zijn voor grote waarden van r verwaarloosbaar, dus) $\dfrac{r+12}{2r+12}$ nadert tot $\frac{1}{2}$ 2
- ($\cos(\angle M_1M_2M_3)$ nadert tot $\frac{1}{2}$,) dus de limiet is $60°$ 1

of

- Als r onbegrensd toeneemt, nadert c_3 tot een gemeenschappelijke raaklijn aan c_1 en c_2 1
- Een redenering of berekening waaruit volgt dat deze raaklijn de x-as in $(-6, 0)$ snijdt, dus $\cos(\angle M_1M_2M_3) = \frac{2}{4}$ (of $\cos(\angle M_1M_2M_3) = \frac{6}{12}$) 1
- ($\cos(\angle M_1M_2M_3)$ nadert tot $\frac{1}{2}$,) dus de limiet is $60°$ 1

Vraag	Antwoord	Scores

5 maximumscore 6

- De stelling van Pythagoras in driehoek M_1PM_3 geeft
  $(r+2)^2 = r^2 + (-2-a)^2$, met a de x-coördinaat van M_3 — 1
- De stelling van Pythagoras in driehoek M_2PM_3 geeft
  $(r+6)^2 = r^2 + (6-a)^2$ — 1
- Dit geeft $4r = a^2 + 4a$ en $12r = a^2 - 12a$ — 1
- Hieruit volgt $3(a^2 + 4a) = a^2 - 12a$ — 1
- Dus $2a^2 + 24a = 0$, dus $a(a+12) = 0$, dus $a = -12$ ($a = 0$ voldoet niet) — 1
- Invullen in een eerder gevonden vergelijking met r en a geeft $r = 24$ — 1

of

- $\cos(\angle PM_2M_3) = \cos(\angle M_1M_2M_3)$ — 1
- $\dfrac{M_2P}{r+6} = \dfrac{r+12}{2r+12}$ — 1
- Dit geeft $M_2P = \frac{1}{2}r + 6$ — 1
- De stelling van Pythagoras in driehoek M_2PM_3 geeft
  $(\frac{1}{2}r+6)^2 + r^2 = (r+6)^2$ (of in driehoek M_1PM_3: $(\frac{1}{2}r-2)^2 + r^2 = (r+2)^2$) — 1
- Herleiden tot een kwadratische vergelijking zonder haakjes — 1
- Hieruit volgt $r = 24$ ($r = 0$ voldoet niet) — 1

of

- De stelling van Pythagoras in driehoek M_2PM_3 geeft
  $r^2 + M_2P^2 = (r+6)^2$ — 1
- $M_2P = \sqrt{12r+36}$ — 1
- $\cos(\angle M_1M_2M_3) = \cos(\angle PM_2M_3)$ — 1
- $\dfrac{r+12}{2r+12} = \dfrac{\sqrt{12r+36}}{r+6}$, dus $2\sqrt{12r+36} = r+12$ — 1
- Herleiden tot een kwadratische vergelijking zonder haakjes — 1
- Hieruit volgt $r = 24$ ($r = 0$ voldoet niet) — 1

of

- De stelling van Pythagoras in driehoek M_1PM_3 geeft
  $(r+2)^2 = r^2 + PM_1^{\ 2}$ — 1
- Hieruit volgt $PM_1 = \sqrt{4r+4}$ — 1
- Invullen in $(r+6)^2 = r^2 + (PM_1 + 8)^2$ geeft $(r+6)^2 = r^2 + (\sqrt{4r+4} + 8)^2$ — 1
- Hieruit volgt $12r + 36 = 4r + 68 + 16\sqrt{4r+4}$ — 1
- Herleiden tot een kwadratische vergelijking zonder haakjes — 1
- Hieruit volgt $r = 24$ ($r = 0$ voldoet niet) — 1