Limietpunt

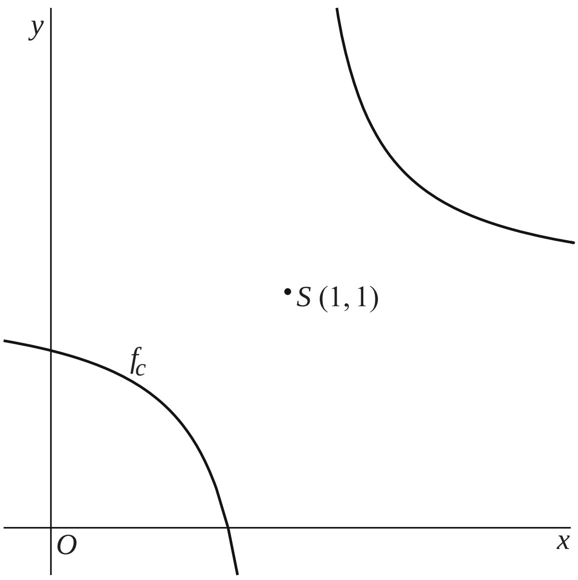
Voor $c > 0$ is de functie f_c gegeven door:

$$f_c(x) = \frac{1}{c(x-1)} + 1$$

3p **13** Bewijs dat voor elke waarde van c de functie f_c de inverse is van zichzelf.

Punt S is het punt met coördinaten $(1, 1)$.
In figuur 1 is voor een waarde van c de grafiek van f_c weergegeven.

figuur 1



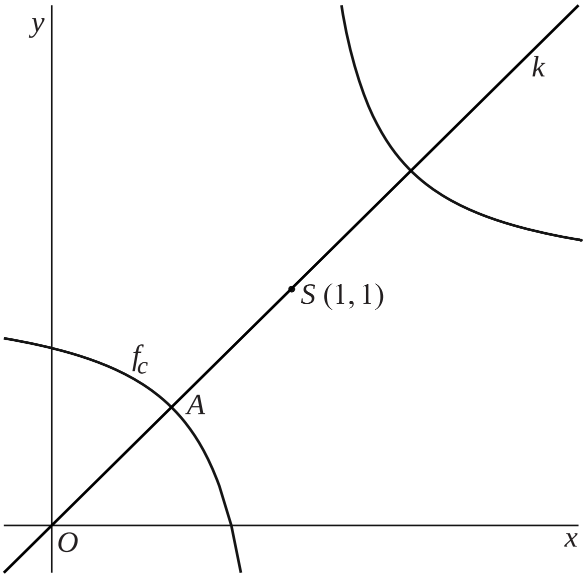
De grafiek van f_c is puntsymmetrisch ten opzichte van S als voor elke waarde van p geldt:

$$\frac{f_c(1+p) + f_c(1-p)}{2} = 1$$

3p **14** Bewijs met behulp van deze formule dat voor elke waarde van c de grafiek van f_c puntsymmetrisch is ten opzichte van S.

Lijn k is de lijn met vergelijking $y = x$. Lijn k snijdt de grafiek van f_c in twee punten. Punt A is het linker snijpunt.
In figuur 2 is de situatie van figuur 1 uitgebreid met A en k.

figuur 2



Als c groter wordt, verschuift A over lijn k, waarbij zowel de x-coördinaat als de y-coördinaat van A toenemen.
Als c onbegrensd toeneemt, naderen zowel de x-coördinaat als de y-coördinaat van A tot een limietwaarde. Het punt A nadert daarom tot een vast punt: het limietpunt van A.

5p **15** Druk de coördinaten van A uit in c en bewijs met behulp van deze coördinaten dat S het limietpunt is van A.