
Formules

Goniometrie

$$\sin(t + u) = \sin(t)\cos(u) + \cos(t)\sin(u)$$

$$\sin(t - u) = \sin(t)\cos(u) - \cos(t)\sin(u)$$

$$\cos(t + u) = \cos(t)\cos(u) - \sin(t)\sin(u)$$

$$\cos(t - u) = \cos(t)\cos(u) + \sin(t)\sin(u)$$

$$\sin(2t) = 2\sin(t)\cos(t)$$

$$\cos(2t) = \cos^2(t) - \sin^2(t) = 2\cos^2(t) - 1 = 1 - 2\sin^2(t)$$

Kettinglijn

De functie f is gegeven door

$$f(x) = \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x} + 2e^{-\frac{1}{2}x} + 1\frac{1}{2}.$$

In figuur 1 is de grafiek van f , een zogenaamde kettinglijn, op het domein $[0,6]$ getekend.

Punt T is het laagste punt van de grafiek en punt A is het gemeenschappelijke punt van de grafiek met de y -as.

De x -coördinaat van T is ongeveer 1,4.

- 4p 1 Bereken exact de waarde van de x -coördinaat van T .

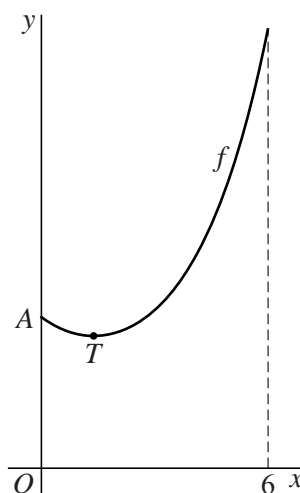
In figuur 2 zijn de grafiek van de functie f en de parabool door A met top T getekend.

In deze figuur is te zien dat de parabool de kettinglijn aanvankelijk goed benadert, maar dat voor grotere waarden van x de benadering minder goed wordt.

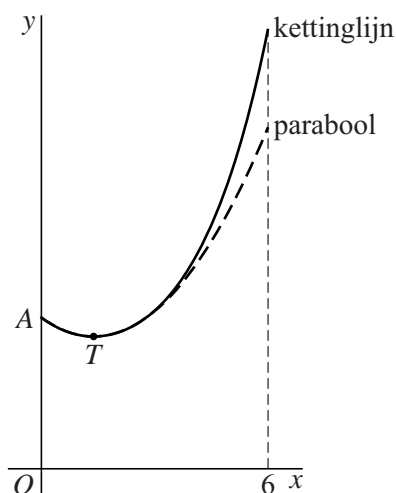
Van de parabool door A met top T kan een vergelijking van de vorm $y = a(x-b)^2 + c$ worden opgesteld.

- 6p 2 Bereken de waarde van x waarvoor het (verticale) hoogteverschil tussen de kettinglijn en deze parabool gelijk is aan 1. Rond je antwoord af op één decimaal.

figuur 1



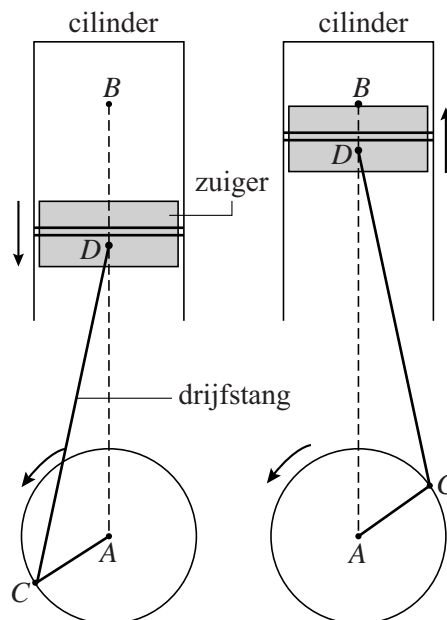
figuur 2



Automotor

In een automotor wordt de op- en neergaande beweging van een zuiger via een drijfstang omgezet in een draaiende beweging. In figuur 1 zijn twee standen getekend. In de eerste stand beweegt de zuiger omlaag en in de tweede stand omhoog.

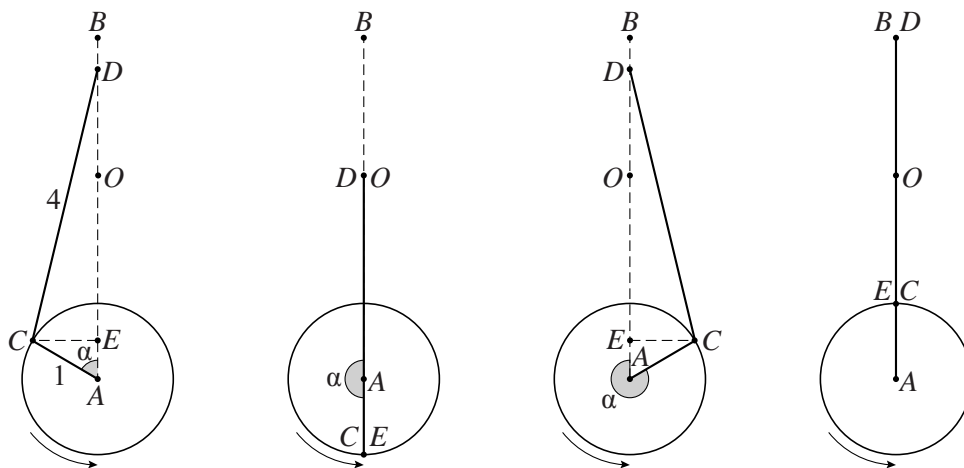
figuur 1



In figuur 2 zijn vier standen schematisch getekend. A is een vast punt, D beweegt verticaal over AB en C draait over een cirkel met straal 1 en middelpunt A waarbij CD een vaste lengte 4 heeft.

De grootte van hoek CAD (in radialen) noemen we α . Punt E is de loodrechte projectie van C op lijn AD .

figuur 2



Punt D beweegt op en neer tussen zijn hoogste punt B ($\alpha = 0$ en $\alpha = 2\pi$) en zijn laagste punt O ($\alpha = \pi$).

De afstand van D tot B noemen we s .

s hangt af van α . Er geldt: $s = 5 - \cos(\alpha) - \sqrt{16 - \sin^2(\alpha)}$, met $0 \leq \alpha \leq 2\pi$.

- 5p **3** Bewijs dit voor de meest linkse van de in figuur 2 getekende standen (dus voor $0 < \alpha < \frac{1}{2}\pi$).

In de techniek wordt s soms benaderd met behulp van de formule $z = 1 - \cos(\alpha) + \frac{1}{8}\sin^2(\alpha)$.

Om te onderzoeken of de formule $z = 1 - \cos(\alpha) + \frac{1}{8}\sin^2(\alpha)$ een goede benadering voor s geeft, wordt het maximale verschil tussen s en z berekend.

3p **4** Bereken in drie decimalen nauwkeurig dit maximale verschil.

Zowel in B als in O is de snelheid van de zuiger gelijk aan 0. Tijdens de beweging wordt voor een waarde van α , met $0 < \alpha < \pi$, de maximale zuigersnelheid bereikt.

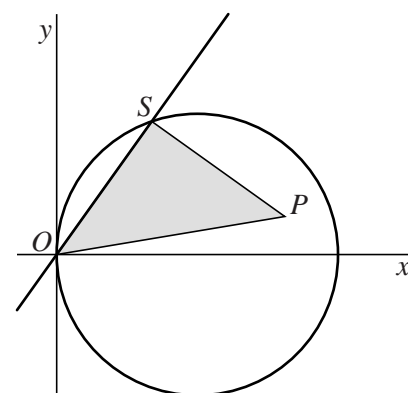
4p **5** Stel een formule voor de afgeleide van z op en bereken hiermee de maximale zuigersnelheid. Rond je antwoord af op twee decimalen.

Een driehoek draaiend over een cirkel

Gegeven is de cirkel met vergelijking $(x-1)^2 + y^2 = 1$. Voor elke waarde van a is gegeven de lijn met vergelijking $y = ax$. Elk van deze lijnen snijdt de cirkel in twee punten, namelijk in O en S . De coördinaten van S zijn afhankelijk van a .

De vector \overrightarrow{SP} is het beeld van \overrightarrow{SO} bij een rotatie om S over 90° . Zie figuur 1, waarin ook driehoek OPS is weergegeven.

figuur 1



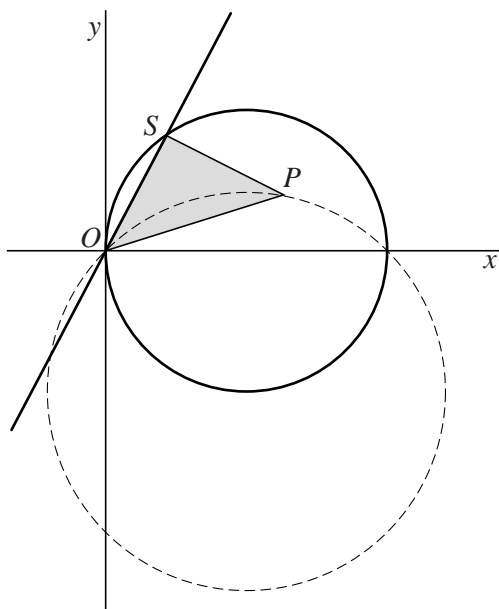
Voor de coördinaten van P geldt:

$$x_P = \frac{2a+2}{a^2+1} \quad \text{en} \quad y_P = \frac{2a-2}{a^2+1}$$

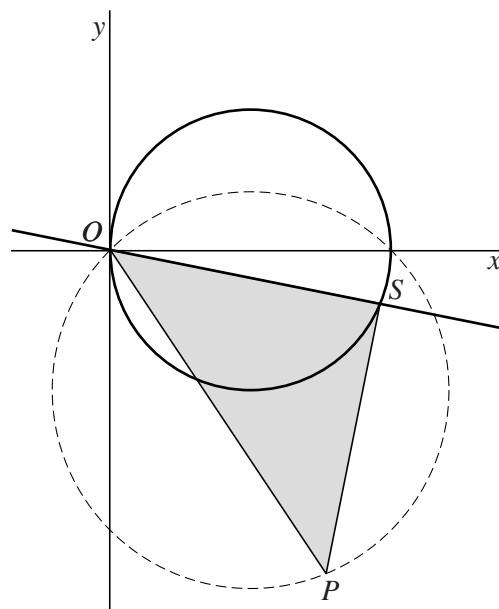
7p **6** Bewijs dat deze formules voor x_P en y_P correct zijn.

Bij elke waarde van a hoort een positie van P . In figuur 2 en figuur 3 is voor twee waarden van a deze positie getekend. Als a varieert, beweegt P over een cirkel door O . Deze cirkel is gestippeld getekend.

figuur 2



figuur 3



5p **7** Stel van de gestippelde cirkel een vergelijking op.

Er is een waarde van a waarvoor x_P maximaal is.

5p **8** Bereken exact deze waarde van a .

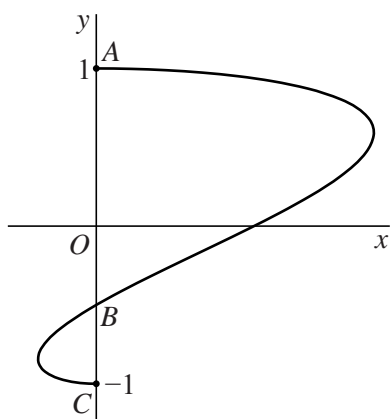
Snelheid op een baan

Voor $0 \leq t \leq \pi$ is de baan van het punt P gegeven door de volgende bewegingsvergelijkingen:

$$\begin{cases} x(t) = \sin(2t) + \sin(t) \\ y(t) = \cos(t) \end{cases}$$

In de figuur is de baan van P weergegeven.

figuur



Op $t = 0$ bevindt P zich in het hoogste punt $A(0, 1)$ van de baan.

Op $t = \pi$ bevindt P zich in het laagste punt $C(0, -1)$ van de baan.

Tussen $t = 0$ en $t = \pi$ snijdt de baan de y -as één keer in het punt B .

8p **9** Bereken exact de snelheid van P in punt B .

Metselboog

In sommige gebouwen zijn boven een raam of een deur bakstenen gemetseld in de vorm van een cirkelboog. Zie figuur 1. Om deze bakstenen tijdens de bouw op de juiste wijze te kunnen plaatsen, wordt gebruikgemaakt van een houten mal, een zogenoemde metselboog. Zie figuur 2.

figuur 1

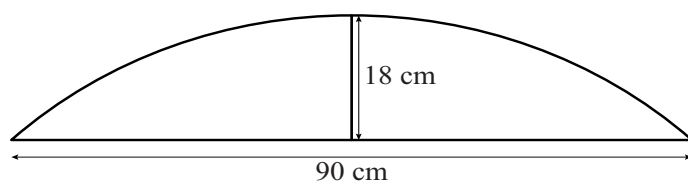


figuur 2



De metselaar vraagt aan de timmerman om een metselboog te maken. De breedte moet 90 cm worden en de hoogte 18 cm. In figuur 3 is het vooraanzicht van de metselboog met de genoemde maten weergegeven.

figuur 3



De bovenrand van de metselboog is een deel van een cirkel. Om de metselboog te kunnen maken, moet de timmerman de straal van deze cirkel berekenen.

- 5p **10** Bereken algebraïsch deze straal. Rond je antwoord af op een geheel aantal cm.

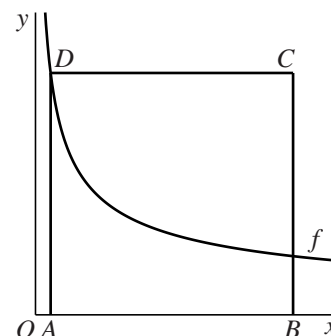
Vierkant bij een grafiek

De functie f is gegeven door $f(x) = \frac{16}{\sqrt{x}}$.

Van vierkant $ABCD$ liggen de hoekpunten A en B op de x -as en het hoekpunt D op de grafiek van f . Zie figuur 1.

De x -coördinaten van A en B noemen we respectievelijk a en b , met $0 < a < b$. De coördinaten van D zijn dan $(a, \frac{16}{\sqrt{a}})$.

figuur 1



Voor $a = 1$ ontstaat het vierkant met zijde 16.

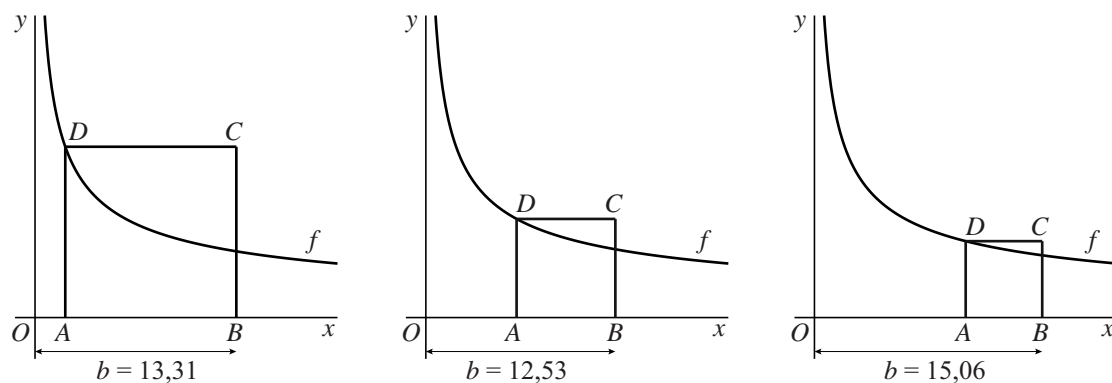
V is het deel van dit vierkant dat zich boven de grafiek bevindt.

Vlakdeel V wordt gewenteld om de x -as.

- 5p 11 Bereken exact de inhoud van het bijbehorende omwentelingslichaam.

In figuur 2 zijn enkele mogelijke situaties voor vierkant $ABCD$ getekend.

figuur 2



Bij de getekende situaties is de afstand van punt B tot de oorsprong aangegeven. Deze afstand b hangt af van a , de x -coördinaat van A . Als a vanaf 0 toeneemt, neemt b eerst af en vervolgens weer toe. Er is dus een waarde van a waarvoor b minimaal is.

- 5p 12 Bereken exact de minimale waarde van b .

Limietpunt

Voor $c > 0$ is de functie f_c gegeven door:

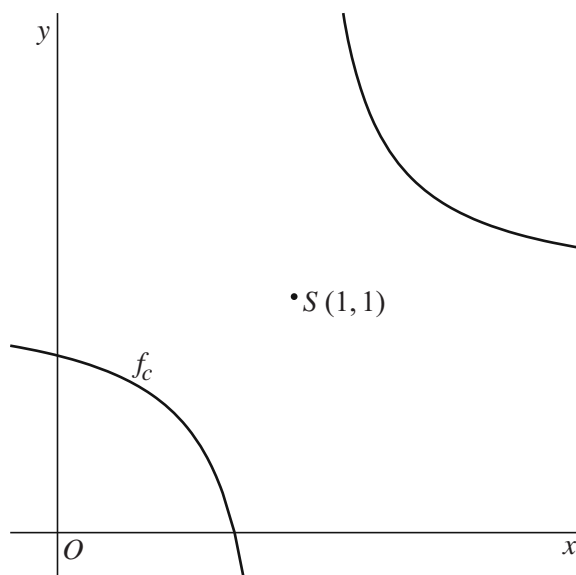
$$f_c(x) = \frac{1}{c(x-1)} + 1$$

- 3p 13 Bewijs dat voor elke waarde van c de functie f_c de inverse is van zichzelf.

Punt S is het punt met coördinaten $(1, 1)$.

In figuur 1 is voor een waarde van c de grafiek van f_c weergegeven.

figuur 1



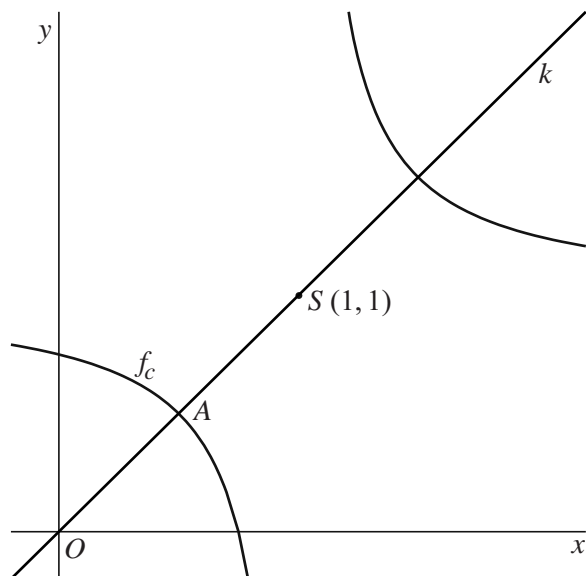
De grafiek van f_c is puntsymmetrisch ten opzichte van S als voor elke waarde van p geldt:

$$\frac{f_c(1+p) + f_c(1-p)}{2} = 1$$

- 3p 14 Bewijs met behulp van deze formule dat voor elke waarde van c de grafiek van f_c puntsymmetrisch is ten opzichte van S .

Lijn k is de lijn met vergelijking $y = x$. Lijn k snijdt de grafiek van f_c in twee punten. Punt A is het linker snijpunt.
 In figuur 2 is de situatie van figuur 1 uitgebreid met A en k .

figuur 2



Als c groter wordt, verschuift A over lijn k , waarbij zowel de x -coördinaat als de y -coördinaat van A toenemen.

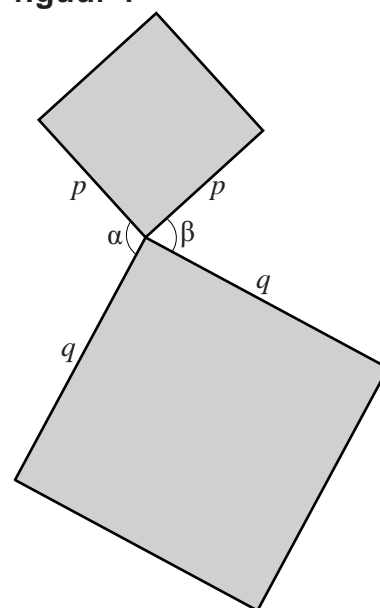
Als c onbegrensd toeneemt, naderen zowel de x -coördinaat als de y -coördinaat van A tot een limietwaarde. Het punt A nadert daarom tot een vast punt: het limietpunt van A .

- 5p **15** Druk de coördinaten van A uit in c en bewijs met behulp van deze coördinaten dat S het limietpunt is van A .

Vier vierkanten

Gegeven zijn twee vierkanten, één met zijde p en één met zijde q . De vierkanten hebben één hoekpunt gemeenschappelijk. De hoeken die de zijden van de vierkanten met elkaar maken in het gemeenschappelijke hoekpunt noemen we α en β . Zie figuur 1.

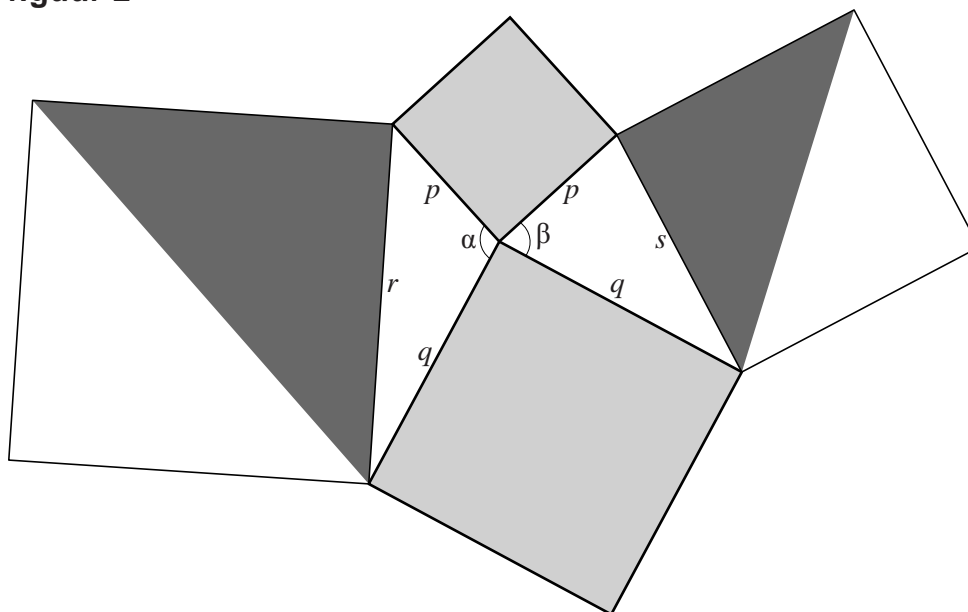
figuur 1



Figuur 2 is een uitbreiding van figuur 1. Er zijn twee vierkanten toegevoegd:

- een vierkant met zijde r dat met elk van de vierkanten uit figuur 1 één hoekpunt gemeenschappelijk heeft;
- een vierkant met zijde s dat met elk van de vierkanten uit figuur 1 één hoekpunt gemeenschappelijk heeft.

figuur 2



In figuur 2 zijn de vierkanten met zijden p en q lichtgrijs gekleurd; van elk van de vierkanten met zijden r en s is de helft donkergrijs gekleurd.

6p **16** Bewijs dat de totale oppervlakte van de lichtgrijze delen gelijk is aan de totale oppervlakte van de donkergrijze delen.