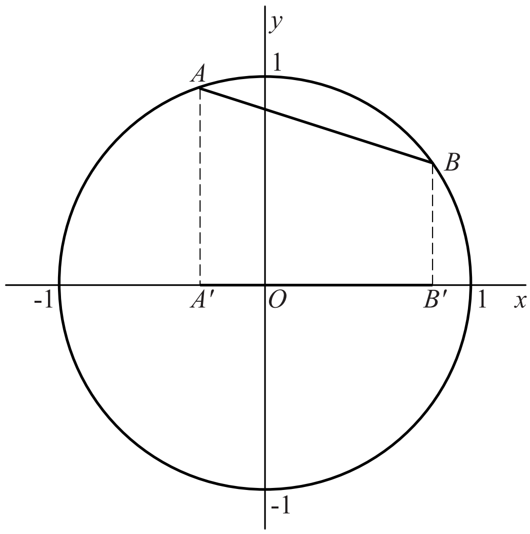
Tussen twee bewegende punten

Over de eenheidscirkel bewegen twee punten A en B. Beide punten bevinden zich op tijdstip $t = 0$ in het punt $(1, 0)$. Ze bewegen met constante snelheid, waarbij de snelheid van A drie keer zo groot is als de snelheid van B.
De bewegingsvergelijkingen van A en B zijn respectievelijk:

$$\begin{cases} x_A(t) = \cos(3t) \\ y_A(t) = \sin(3t) \end{cases} \text{ en } \begin{cases} x_B(t) = \cos t \\ y_B(t) = \sin t \end{cases}$$

Voor $t \neq k \cdot \pi$, met k geheel, vallen de punten A en B niet samen en zijn ze de eindpunten van de koorde AB.
In de figuur is de situatie getekend voor $t = \frac{1}{5}\pi$.

figuur



Lijnstuk $A'B'$ is de loodrechte projectie van koorde AB op de x-as. De lengte van $A'B'$ verandert voortdurend tijdens de beweging.

4p **12** Bereken de maximale lengte van $A'B'$. Rond je antwoord af op twee decimalen.

Tijdens de beweging verandert ook de richtingscoëfficiënt van koorde AB. Deze richtingscoëfficiënt noemen we a. Voor elk tijdstip t, waarbij $t \neq k \cdot \frac{1}{2}\pi$ met k geheel, geldt:

(1) $\quad a = -\dfrac{\cos(2t)}{\sin(2t)}$

Deze formule kan bewezen worden met behulp van de volgende goniometrische formules:

(2) $\quad \sin p - \sin q = 2\sin\frac{p-q}{2}\cos\frac{p+q}{2}$ (voor elke waarde van p en q)

(3) $\quad \cos p - \cos q = -2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$ (voor elke waarde van p en q)

4p **13** Bewijs formule (1) met behulp van formules (2) en (3).

Lijn l is de lijn met vergelijking $y = -x$. Er zijn vier waarden van t, met $0 < t < 2\pi$, waarvoor koorde AB evenwijdig is met l.

5p **14** Bereken exact deze vier waarden.