

## 4 Beoordelingsmodel

Vraag	Antwoord	Scores
-------	----------	--------

### Eerste- en derdegraadsfunctie

#### 1 maximumscore 4

- Aangetoond moet worden dat  $f'(0) = g'(0)$  1
- $f'(x) = 2x \cdot (x - 1\frac{1}{2}) + (x^2 - 1) \cdot 1$  1
- $f'(0) = -1$  1
- $g'(x) = -1$ , dus  $g'(0) = -1$  (dus de grafieken van  $f$  en  $g$  raken elkaar in  $A$ ) 1

#### 2 maximumscore 6

- De grafiek van  $f$  snijdt de  $x$ -as tussen  $O$  en  $B$  in  $(1, 0)$  1
- De oppervlakte van het linkerdeel is  $\int_0^1 (x^2 - 1)(x - 1\frac{1}{2}) dx$  1
- $(x^2 - 1)(x - 1\frac{1}{2}) = x^3 - 1\frac{1}{2}x^2 - x + 1\frac{1}{2}$  1
- Een primitieve van  $x^3 - 1\frac{1}{2}x^2 - x + 1\frac{1}{2}$  is  $\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 1\frac{1}{2}x$  1
- De oppervlakte van het linkerdeel is  $\frac{3}{4}$  1
- De oppervlakte van het rechterdeel is  $\frac{1}{2} \cdot (1\frac{1}{2})^2 - \frac{3}{4} = \frac{3}{8}$  (en dat is de helft van de oppervlakte van het linkerdeel) 1

#### 3 maximumscore 4

- $(h(x) = \frac{-(x - 1\frac{1}{2})}{(x^2 - 1)(x - 1\frac{1}{2})})$  dus  $h(x) = \frac{-1}{x^2 - 1}$  (voor  $x \neq 1\frac{1}{2}$ ) 1
- $\frac{-1}{(1\frac{1}{2})^2 - 1} = \frac{-1}{1\frac{1}{4} - 1} = -\frac{4}{5}$ , dus de perforatie is  $(1\frac{1}{2}, -\frac{4}{5})$  1
- $(x^2 - 1 = 0)$  geeft  $x = -1$  of  $x = 1$ , dus de verticale asymptoten hebben vergelijkingen  $x = -1$  en  $x = 1$  1
- $(\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-1}{x^2 - 1} = 0)$ , dus de horizontale asymptoot heeft vergelijking  $y = 0$  1

Vraag	Antwoord	Scores
-------	----------	--------

## Verzadigingsgraad van hemoglobine

### 4 maximumscore 3

- De vergelijking  $75 = \frac{100p^3}{p^3 + 25000}$  moet worden opgelost 1
- Beschrijven hoe deze vergelijking met de GR kan worden opgelost 1
- Het antwoord: 42 (mmHg) 1

of

- De vergelijking  $75 = \frac{100p^3}{p^3 + 25000}$  moet worden opgelost 1
- $75 = \frac{100p^3}{p^3 + 25000}$  geeft  $100p^3 = 75p^3 + 1875000$  1
- $25p^3 = 1875000$  geeft  $p^3 = 75000$ , dus  $p = \sqrt[3]{75000} \approx 42$  (mmHg) 1

### 5 maximumscore 4

- $\frac{dv}{dp} = \frac{300p^2(p^3 + 25000) - 100p^3 \cdot 3p^2}{(p^3 + 25000)^2}$  (dus  $\frac{dv}{dp} = \frac{7500000p^2}{(p^3 + 25000)^2}$ ) 2
- Beschrijven hoe de waarde van  $p$  waarvoor  $\frac{dv}{dp}$  maximaal is, kan worden bepaald 1
- Het antwoord: 23 1

of

- $\frac{dv}{dp} = \frac{300p^2(p^3 + 25000) - 100p^3 \cdot 3p^2}{(p^3 + 25000)^2}$  (dus  $\frac{dv}{dp} = \frac{7500000p^2}{(p^3 + 25000)^2}$ ) 2
- $\frac{d^2v}{dp^2} = \frac{15000000p \cdot (p^3 + 25000)^2 - 7500000p^2 \cdot 6p^2(p^3 + 25000)}{(p^3 + 25000)^4}$  1
- Algebraïsch of met GR  $\frac{d^2v}{dp^2} = 0$  oplossen geeft het antwoord 23 (want uit de grafiek blijkt dat de afgeleide voor deze waarde van  $p$  maximaal is) 1

### 6 maximumscore 4

- Uit  $\frac{v}{100-v} = 0,00004p^3$  volgt  $v = 0,00004p^3(100-v)$  1
- Dit geeft  $25000v = 100p^3 - vp^3$  1
- Hieruit volgt  $25000v + vp^3 = 100p^3$  1
- Daaruit volgt  $v(25000 + p^3) = 100p^3$ , dus  $v = \frac{100p^3}{p^3 + 25000}$  1

Vraag	Antwoord	Scores
-------	----------	--------

## Vermenigvuldigen in horizontale en verticale richting

### 7 maximumscore 4

- Vermenigvuldigen ten opzichte van de  $x$ -as met  $e$  geeft de grafiek met vergelijking  $y = e \cdot \frac{1 + \ln x}{x}$  1
  - Deze vermenigvuldigen ten opzichte van de  $y$ -as met  $\frac{1}{e}$  geeft de grafiek met vergelijking  $y = e \cdot \frac{1 + \ln(ex)}{ex}$  1
  - $e \cdot \frac{1 + \ln(ex)}{ex} = \frac{1 + \ln e + \ln x}{x}$  1
  - $c = 1 + \ln e = 2$  1
- of
- Op de grafiek van  $f$  ligt het punt  $(1, 1)$  1
  - Het beeld van dit punt na de twee vermenigvuldigingen is  $(\frac{1}{e}, e)$  1
  - Dit punt ligt op de grafiek van  $g_c$  als  $e = \frac{c + \ln(\frac{1}{e})}{(\frac{1}{e})}$  1
  - $c + \ln(\frac{1}{e}) = 1$  geeft  $c = 2$  1

### 8 maximumscore 4

- De oppervlakte is  $\int_1^e (g_3(x) - f(x)) dx$  1
- $g_3(x) - f(x) = \frac{3 + \ln x}{x} - \frac{1 + \ln x}{x} = \frac{2}{x}$  1
- Een primitieve van  $\frac{2}{x}$  is  $2 \ln x$  1
- De oppervlakte is  $2 \ln e - 2 \ln 1 = 2$  1

Vraag	Antwoord	Scores
-------	----------	--------

## Twee vierkanten tegen een driehoek

### 9 maximumscore 3

$$\bullet \quad \overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-p \\ -q \end{pmatrix} \quad 1$$

$$\bullet \quad \overline{AD} \text{ is het beeld van } \overline{AB} \text{ bij een rotatie over een hoek van } 90^\circ \text{ linksom, dus } \overline{AD} = \begin{pmatrix} q \\ 2-p \end{pmatrix} \quad 1$$

$$\bullet \quad \overline{OD} = \overline{OA} + \overline{AD} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} q \\ 2-p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p+q \\ 2-p+q \end{pmatrix} \quad 1$$

of

$$\bullet \quad y_D = y_A + (y_D - y_A) = y_A + (x_B - x_A) \quad 1$$

$$\bullet \quad \text{Dus } y_D = q + (2 - p) = 2 - p + q \quad 1$$

$$\bullet \quad \text{Evenzo } x_D = x_A + (x_D - x_A) = p + q \text{ (dus } \overline{OD} = \begin{pmatrix} p+q \\ 2-p+q \end{pmatrix}) \quad 1$$

### 10 maximumscore 4

$$\bullet \quad \overline{MA} = \frac{1}{2} \cdot \overline{BO} + \overline{OA} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p-1 \\ q \end{pmatrix} \quad 1$$

$$\bullet \quad \overline{ED} = \overline{OD} - \overline{OE} = \begin{pmatrix} p+q \\ 2-p+q \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p-q \\ p+q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2q \\ 2-2p \end{pmatrix} \quad 1$$

$$\bullet \quad \overline{MA} \cdot \overline{ED} = \begin{pmatrix} p-1 \\ q \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2q \\ 2-2p \end{pmatrix} \quad 1$$

$$\bullet \quad \overline{MA} \cdot \overline{ED} = 2pq - 2q + 2q - 2pq = 0, \text{ dus } MA \text{ staat loodrecht op } ED \quad 1$$

of

$$\bullet \quad \text{De richtingscoëfficiënt van } ED \text{ is } \frac{y_D - y_E}{x_D - x_E} = \frac{(2-p+q) - (p+q)}{(p+q) - (p-q)} = \frac{1-p}{q} \quad 2$$

$$\bullet \quad \text{De richtingscoëfficiënt van } AM \text{ is } \frac{y_M - y_A}{x_M - x_A} = \frac{-q}{1-p} \quad 1$$

$$\bullet \quad \text{Het product van deze richtingscoëfficiënten is } -1 \text{ (dus } MA \text{ staat loodrecht op } ED) \quad 1$$

Vraag	Antwoord	Scores
-------	----------	--------

## Een hartvormige kromme

### 11 maximumscore 6

- $x'(t) = -2\sin t + 2\sin(2t)$  1
- $y'(t) = 2\cos t - 2\cos(2t)$  1
- $v = \sqrt{(-2\sin t + 2\sin(2t))^2 + (2\cos t - 2\cos(2t))^2}$  1
- Hieruit volgt  $v = \sqrt{8 - 8(\sin t \cdot \sin(2t) + \cos t \cdot \cos(2t))}$  1
- Dus  $v = \sqrt{8 - 8\cos(2t - t)} = \sqrt{8 - 8\cos t}$  1
- (of:  $v = \sqrt{8 - 8(\sin t \cdot 2\sin t \cos t + \cos t \cdot (1 - 2\sin^2 t))} = \sqrt{8 - 8\cos t}$ ) 1
- De maximale snelheid is  $\sqrt{8 - 8 \cdot -1} = 4$  1

### 12 maximumscore 6

- De vergelijking  $2\cos t - \cos(2t) = 1$  moet worden opgelost 1
- Dit geeft  $2\cos t - (2\cos^2 t - 1) = 1$  1
- Hieruit volgt  $\cos t - \cos^2 t = 0$  1
- Dus  $\cos t = 0$  of  $\cos t = 1$  1
- Dit geeft  $t = 0$  of  $t = \frac{1}{2}\pi$  of  $t = 1\frac{1}{2}\pi$  of  $t = 2\pi$  1
- $y(\frac{1}{2}\pi) = 2$  (of  $y(1\frac{1}{2}\pi) = -2$ ), dus  $a = 2$  1

#### Opmerking

Als de vergelijking  $2\cos t - \cos(2t) = 1$  niet algebraïsch maar met de GR is opgelost, voor deze vraag maximaal 1 scorepunt toekennen.

Vraag	Antwoord	Scores
-------	----------	--------

## De leeftijd van ons zonnestelsel

### 13 maximumscore 3

- Voor de halveringstijd  $t$  geldt  $e^{-\lambda t} = \frac{1}{2}$  1
- Hieruit volgt  $-\lambda t = \ln \frac{1}{2}$  1
- $t = \frac{\ln \frac{1}{2}}{-\lambda} = \frac{\ln \frac{1}{2}}{-1,42 \cdot 10^{-11}}$ , dus de gevraagde tijd is (ongeveer) 49 miljard  
(of  $4,9 \cdot 10^{10}$ ) (jaar) 1

### 14 maximumscore 3

- Uit  $a(t) + b(t) = a(0) + b(0)$  volgt  $a(t) + b(t) - a(0) = b(0)$  1
- Uit  $a(t) = a(0) \cdot e^{-\lambda t}$  volgt  $a(0) = a(t) \cdot e^{\lambda t}$  1
- Dus  $a(t) + b(t) - a(t) \cdot e^{\lambda t} = b(0)$ , ofwel  $b(t) + (1 - e^{\lambda t})a(t) = b(0)$  1

of

- $b(t) + (1 - e^{\lambda t})a(t) = a(0) + b(0) - a(t) + (1 - e^{\lambda t})a(t)$  1
- $a(0) + b(0) - a(t) + (1 - e^{\lambda t})a(t) = a(0) + b(0) - a(t) \cdot e^{\lambda t}$  1
- $a(0) + b(0) - a(t) \cdot e^{\lambda t} = a(0) + b(0) - a(0) \cdot e^{-\lambda t} \cdot e^{\lambda t} = b(0)$   
(dus  $b(t) + (1 - e^{\lambda t})a(t) = b(0)$ ) 1

### 15 maximumscore 4

- Invullen van de tabelgegevens geeft  $0,739 + (1 - e^{1,42 \cdot 10^{-11} \cdot t})0,60 = b(0)$   
en  $0,713 + (1 - e^{1,42 \cdot 10^{-11} \cdot t})0,20 = b(0)$  1
- (Omdat  $b(0)$  voor elke meteoriet hetzelfde is, geldt)  
 $0,739 - (e^{1,42 \cdot 10^{-11} \cdot t} - 1)0,60 = 0,713 - (e^{1,42 \cdot 10^{-11} \cdot t} - 1)0,20$  1
- Beschrijven hoe deze vergelijking kan worden opgelost 1
- Het antwoord: 4 miljard (of  $4 \cdot 10^9$ ) (jaar) 1

Vraag	Antwoord	Scores
-------	----------	--------

## Raakcirkel en raaklijnen

### 16 maximumscore 6

- Een vergelijking van  $c_3$  heeft de vorm  $x^2 + (y - m)^2 = r^2$  1
- $c_3$  raakt  $c_1$  dus  $r = m - 3$  1
- $c_3$  raakt  $c_2$  dus  $r = \sqrt{m^2 + 225} - 12$  1
- $\sqrt{m^2 + 225} - 12 = m - 3$  geeft  $\sqrt{m^2 + 225} = m + 9$  1
- Hieruit volgt  $m^2 + 225 = m^2 + 18m + 81$ , dus  $m = 8$  1
- $r = 5$ , dus een vergelijking van  $c_3$  is  $x^2 + (y - 8)^2 = 25$  1

of

- De middelpunten van de cirkels zijn de hoekpunten van een rechthoekige driehoek 1
- In deze driehoek geldt  $(r + 3)^2 + 15^2 = (r + 12)^2$ , met  $r$  de straal van  $c_3$  1
- $r^2 + 6r + 9 + 225 = r^2 + 24r + 144$  1
- Hieruit volgt  $r = 5$  1
- Dus het middelpunt van  $c_3$  heeft coördinaten  $(0, 8)$  1
- Een vergelijking van  $c_3$  is  $x^2 + (y - 8)^2 = 25$  1

Vraag	Antwoord	Scores
17	<b>maximumscore 8</b>	
	• Een van de gemeenschappelijke raaklijnen heeft vergelijking $x = 3$	1
	• De andere gemeenschappelijke raaklijnen gaan door $(-k, 0)$	1
	• Uit gelijkvormige driehoeken volgt $\frac{k}{3} = \frac{k+15}{12}$	2
	• Hieruit volgt $k = 5$	1
	• Een vergelijking voor de gemeenschappelijke raaklijn heeft de vorm $y = a(x+5)$	1
	• $a = \pm \tan \varphi = \pm \frac{3}{\sqrt{5^2 - 3^2}} = \pm \frac{3}{4}$ , waarbij $\varphi$ de richtingshoek van de raaklijn is	1
	• Vergelijkingen zijn $y = \frac{3}{4}(x+5)$ en $y = -\frac{3}{4}(x+5)$	1
	of	
	• Een van de gemeenschappelijke raaklijnen heeft vergelijking $x = 3$	1
	• De andere gemeenschappelijke raaklijnen hebben een vergelijking van de vorm $y = ax + b$ , dus $ax - y + b = 0$	1
	• De lijn raakt $c_1$ en $c_2$ als $\frac{ b }{\sqrt{a^2 + 1}} = 3$ en $\frac{ 15a + b }{\sqrt{a^2 + 1}} = 12$	2
	• Hieruit volgt $4 \cdot  b  =  15a + b $	1
	• $15a + b = 4b$ of $15a + b = -4b$ , dus $b = 5a$ of $b = -3a$	1
	• $\frac{ -3a }{\sqrt{a^2 + 1}} = 3$ geeft $a^2 = a^2 + 1$ , en dat heeft geen oplossing	1
	• $\frac{ 5a }{\sqrt{a^2 + 1}} = 3$ geeft $25a^2 = 9(a^2 + 1)$ , dus $a = \pm \frac{3}{4}$ , met raaklijnen $y = \frac{3}{4}(x+5)$ en $y = -\frac{3}{4}(x+5)$	1