

Vraag	Antwoord	Scores
-------	----------	--------

Een regenton

1 maximumscore 5

- $V = \pi \int_0^h (r(x))^2 dx$ 1
- $(r(x))^2 = \frac{1}{100}(5 + 15x - 15x^2)$ 1
- Een primitieve van $5 + 15x - 15x^2$ is $5x + 7\frac{1}{2}x^2 - 5x^3$ 1
- Dus $V = \frac{\pi}{100}(5h + 7\frac{1}{2}h^2 - 5h^3)$ 1
- $V = \frac{\pi}{100} \cdot 2\frac{1}{2}(2h + 3h^2 - 2h^3) = \frac{\pi}{40}(2h + 3h^2 - 2h^3)$ 1

2 maximumscore 5

- Het volume van de regenton is $\frac{3\pi}{40} (\approx 0,236) \text{ (m}^3\text{)}$ (of nauwkeuriger) 1
 - $\frac{3}{4} \cdot \frac{3\pi}{40} = \frac{9\pi}{160} (\approx 0,177)$ (of nauwkeuriger) 1
 - Voor de waterhoogte h geldt: $\frac{\pi}{40}(2h + 3h^2 - 2h^3) = \frac{9\pi}{160}$
(of $\frac{\pi}{40}(2h + 3h^2 - 2h^3) \approx 0,177$) 1
 - Beschrijven hoe deze vergelijking kan worden opgelost 1
 - Het antwoord: 0,72 (m) (of 72 cm) 1
- of
- Voor $h = 1$ is $2h + 3h^2 - 2h^3$ gelijk aan 3 1
 - Voor de waterhoogte h moet gelden: $2h + 3h^2 - 2h^3 = \frac{3}{4} \cdot 3$ 2
 - Beschrijven hoe deze vergelijking kan worden opgelost 1
 - Het antwoord: 0,72 (m) (of 72 cm) 1

Vraag	Antwoord	Scores
-------	----------	--------

Een ellipsvormige baan

3 maximumscore 3

- De afstand van P tot de oorsprong op tijdstip t is

$$\sqrt{\left(\frac{1}{2}\sin t\right)^2 + \left(\sin\left(t + \frac{1}{3}\pi\right)\right)^2} \quad 1$$

- Beschrijven hoe het maximum van deze afstand kan worden bepaald 1
- Het antwoord: 1,04 1

4 maximumscore 5

- De snelheid van P op tijdstip t is $\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$ 1

- $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2}\cos t$ 1

- $\frac{dy}{dt} = \cos\left(t + \frac{1}{3}\pi\right)$ 1

- Voor $t=0$ geldt: $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2}$ en $\frac{dy}{dt} = \frac{1}{2}$ 1

- De snelheid is dan $\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{2}}$ (of een vergelijkbare uitdrukking) 1

5 maximumscore 6

- In A en B geldt: $\sin\left(t + \frac{1}{3}\pi\right) = \sin t$ 1

- Dus $t + \frac{1}{3}\pi = t + k \cdot 2\pi$ of $t + \frac{1}{3}\pi = \pi - t + k \cdot 2\pi$ (met k geheel) 1

- Hieruit volgt voor $0 \leq t \leq 2\pi$: $t = \frac{1}{3}\pi$ of $t = 1\frac{1}{3}\pi$ 2

- Dus de coördinaten van A zijn $\left(\frac{1}{4}\sqrt{3}, \frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$ en de coördinaten van B zijn $\left(-\frac{1}{4}\sqrt{3}, -\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$ 2

Vraag	Antwoord	Scores
-------	----------	--------

Raaklijn door perforatie

6 maximumscore 7

- $\frac{x^2 - 4}{x^3 + 2x^2} = \frac{(x+2)(x-2)}{x^2(x+2)} = \frac{x-2}{x^2}$ (met $x \neq -2$ en $x \neq 0$) 1
- Voor x in dit laatste -2 invullen geeft als uitkomst -1 , dus de perforatie is $(-2, -1)$ 1
- Het snijpunt met de x -as is $(2, 0)$ 1
- $f'(x) = \frac{1 \cdot x^2 - (x-2) \cdot 2x}{x^4} (= \frac{4-x}{x^3})$
(of $f'(x) = \frac{2x \cdot (x^3 + 2x^2) - (x^2 - 4) \cdot (3x^2 + 4x)}{(x^3 + 2x^2)^2}$) 2
- $f'(2) = \frac{1}{4}$, dus de richtingscoëfficiënt van de raaklijn in $(2, 0)$ is $\frac{1}{4}$ 1
- Een vergelijking van de raaklijn in $(2, 0)$ is dus $y = \frac{1}{4}x - \frac{1}{2}$ en hieraan voldoen de coördinaten van het punt $(-2, -1)$ (of: De lijn door $(-2, -1)$ en $(2, 0)$ heeft ook richtingscoëfficiënt $\frac{1}{4}$) (dus de raaklijn in $(2, 0)$ gaat door de perforatie) 1

Vraag	Antwoord	Scores
-------	----------	--------

Medicijn in actieve vorm

7 maximumscore 3

- Er moet gelden $e^{-k \cdot t_{99}} = 0,01$ 2
- Dus $t_{99} = \frac{\ln 100}{k}$ (of een gelijkwaardige uitdrukking)
(of $t_{99} = \frac{4,6}{k}$ (of nauwkeuriger)) 1

Opmerking

Als met $e^{-k \cdot t_{99}} = 0,99$ is gerekend, dan voor deze vraag maximaal 1 scorepunt toekennen.

8 maximumscore 4

- $a'(t) = 25(-0,1 \cdot e^{-0,1 \cdot t} + 0,4 \cdot e^{-0,4 \cdot t})$ 2
- Beschrijven hoe de vergelijking $25(-0,1 \cdot e^{-0,1 \cdot t} + 0,4 \cdot e^{-0,4 \cdot t}) = 0$ kan worden opgelost 1
- $t_{\max} \approx 4,6$ (of nauwkeuriger) (of $t_{\max} = \frac{10}{3} \ln 4$ (of een gelijkwaardige uitdrukking)) 1

9 maximumscore 6

- Beschrijven hoe met de GR het maximum van $a(t)$ berekend kan worden 1
 - Dit maximum is (ongeveer) 11,8 1
 - Beschrijven hoe met de GR de t -waarden die behoren bij de snijpunten met de horizontale lijn op hoogte 5,9 gevonden kunnen worden 1
 - De t -waarden zijn (ongeveer) 1,0 en 14,3 (of nauwkeuriger) 2
 - Het antwoord: 13 (uur) 1
- of
- Substitutie van $t_{\max} = 4,6$ (of nauwkeuriger) (of $t_{\max} = \frac{10}{3} \ln 4$) in de formule voor $a(t)$ geeft $a_{\max} \approx 11,8$ (of nauwkeuriger) 1
 - Opgelost moet worden $25(e^{-0,1 \cdot t} - e^{-0,4 \cdot t}) = \frac{1}{2} \cdot 11,8$ 1
 - Beschrijven hoe deze vergelijking kan worden opgelost 1
 - $t \approx 1,0$ of $t \approx 14,3$ (of nauwkeuriger) 2
 - Het antwoord: 13 (uur) 1

Vraag	Antwoord	Scores
-------	----------	--------

Drie halve cirkels

10 maximumscore 5

- $MC = 2$ en $MD = 4$ 1
- De stelling van Pythagoras in driehoek MCD geeft
 $CD = (\sqrt{MD^2 - MC^2}) = \sqrt{4^2 - 2^2} (= \sqrt{12})$ 1
- Gebruik van een rechthoekige driehoek KLS , waarbij S de loodrechte projectie is van K op LQ (of een rechthoekige driehoek PQX , waarbij X het snijpunt is van LQ en de lijn door P evenwijdig aan KL) 1
- $LS = 2$, $KS = PQ$, $KL = 4$ (of: $QX = 2$, $PX = KL = 4$) 1
- De stelling van Pythagoras in driehoek KLS (of in driehoek PQX) geeft
 $KS = (\sqrt{KL^2 - LS^2}) = \sqrt{4^2 - 2^2}$, dus $PQ = \sqrt{4^2 - 2^2} (= \sqrt{12})$
(of: $PQ = (\sqrt{PX^2 - QX^2}) = \sqrt{4^2 - 2^2} (= \sqrt{12})$) (dus geldt $PQ = CD$) 1

of

- $MC = 2$ en $MD = 4$ 1
- De stelling van Pythagoras in driehoek MCD geeft
 $CD = (\sqrt{MD^2 - MC^2}) = \sqrt{4^2 - 2^2} = 2\sqrt{3}$ 1
- ($\triangle RKP$ en $\triangle RLQ$ hebben twee paren gelijke hoeken, dus)
 $\triangle RKP \sim \triangle RLQ$ met R het snijpunt van AL en PQ ; samen met $KP = 1$ en $LQ = 3$ geeft dit: $\triangle RLQ$ is een vergroting van $\triangle RKP$ met factor 3 1
- $KL = 4$, dus $RK = 2$ 1
- De stelling van Pythagoras in driehoek RKP geeft
 $RP = (\sqrt{RK^2 - PK^2}) = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$ dus $PQ = 2\sqrt{3}$ (dus geldt $PQ = CD$) 1

11 maximumscore 5

- $KM = 3$, $MT = 4 - r$, $KT = 1 + r$ 1
- De cosinusregel in driehoek KMT geeft
 $(1 + r)^2 = 3^2 + (4 - r)^2 - 2 \cdot 3 \cdot (4 - r) \cdot \cos \alpha$ 1
- Herleiden tot $\cos \alpha = \frac{12 - 5r}{12 - 3r}$ 3

Vraag	Antwoord	Scores
12	maximumscore 4	
	• $\frac{7r-4}{4-r} = \frac{12-5r}{12-3r}$	1
	• Hieruit volgt $(7r-4)(12-3r) = (12-5r)(4-r)$	1
	• Herleiden tot $26r^2 - 128r + 96 = 0$	1
	• Dit geeft, bijvoorbeeld met de abc-formule, $r = \frac{12}{13}$ (want $r = 4$ voldoet niet)	1
	of	
	• $\frac{7r-4}{4-r} = \frac{12-5r}{12-3r}$	1
	• Hieruit volgt $\frac{21r-12}{12-3r} = \frac{12-5r}{12-3r}$	1
	• Dus $21r-12 = 12-5r$	1
	• Dit geeft $r = \frac{12}{13}$	1

Onafhankelijk van p

13	maximumscore 8	
	• $f(x) = 0$ geeft ($x = 0$ of) $x = 3p$ (dus de x -coördinaat van A is $3p$)	1
	• De oppervlakte van het grijze gebied is $\left[-\frac{1}{4}x^4 + px^3\right]_0^{3p}$	1
	• Dit is $-\frac{1}{4}(3p)^4 + p(3p)^3 = -\frac{81}{4}p^4 + 27p^4 = \frac{27}{4}p^4$	1
	• $f'(x) = -3x^2 + 6px$	1
	• $f'(x) = 0$ geeft ($x = 0$ of) $x = 2p$ (dus de x -coördinaat van T is $2p$)	1
	• $f(2p) = -(2p)^3 + 3p \cdot (2p)^2 = 4p^3$ (dus de y -coördinaat van T is $4p^3$)	1
	• De oppervlakte van $OABC$ is dus $3p \cdot 4p^3 = 12p^4$	1
	• Dus de verhouding van de oppervlakten is $\frac{27}{4}p^4 : 12p^4 = \frac{27}{4} : 12$ ($= 9 : 16$) (en dit is onafhankelijk van p)	1

Opmerking

Als slechts voor een aantal waarden van p de verhouding is uitgerekend en dan geconcludeerd is dat de verhouding telkens gelijk is, hiervoor geen scorepunten toekennen.

Vraag	Antwoord	Scores
-------	----------	--------

Twee lijnen en een cirkel

14 maximumscore 3

- Voor de hoek α tussen m en n geldt:

$$\cos \alpha = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}}{\sqrt{1^2 + 2^2} \cdot \sqrt{1^2 + 3^2}} \left(= \frac{7}{\sqrt{50}} \right) \quad 2$$

- De gevraagde waarde van α is 8° 1

of

- De richtingscoëfficiënt van m is -2 , dus m maakt een hoek van ongeveer $63,4^\circ$ (of $-63,4^\circ$) met de x -as 1
- De richtingscoëfficiënt van n is -3 , dus n maakt een hoek van ongeveer $71,6^\circ$ (of $-71,6^\circ$) met de x -as 1
- De hoek tussen m en n is het verschil tussen deze twee hoeken, dus de gevraagde waarde is 8° 1

15 maximumscore 4

- $x = t$ en $y = 2 - 2t$ invullen in de vergelijking van c geeft

$$t^2 + (1 - 2t)^2 = 1 \quad 1$$

- Herleiden tot $5t^2 - 4t = 0$ 1
- Hieruit volgt ($t = 0$ of) $t = \frac{4}{5}$ 1
- $t = \frac{4}{5}$ invullen geeft $B(\frac{4}{5}, \frac{2}{5})$ 1

of

- $\begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ \frac{2}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ voor $t = \frac{4}{5}$, dus $B(\frac{4}{5}, \frac{2}{5})$ ligt op m 2

- $(\frac{4}{5})^2 + (\frac{2}{5} - 1)^2 = 1$, dus $B(\frac{4}{5}, \frac{2}{5})$ ligt op c 2

Vraag	Antwoord	Scores
16	maximumscore 6	
	<ul style="list-style-type: none"> De middelloodlijn van AB gaat door $(\frac{9}{10}, \frac{1}{5})$ en heeft richtingscoëfficiënt $\frac{1}{2}$ 	1
	<ul style="list-style-type: none"> Een vergelijking van de middelloodlijn van AB is dus $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$ 	1
	<ul style="list-style-type: none"> Een vergelijking van de middelloodlijn van AD is $x = \frac{5}{6}$ 	1
	<ul style="list-style-type: none"> Het snijpunt van deze middelloodlijnen is $M(\frac{5}{6}, \frac{1}{6})$ 	1
	<ul style="list-style-type: none"> Dus A, B en D liggen op een cirkel met middelpunt $M(\frac{5}{6}, \frac{1}{6})$ en straal 	
	$MA = \sqrt{\left(\frac{1}{6}\right)^2 + \left(\frac{1}{6}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{18}}$	1
	<ul style="list-style-type: none"> $MC = \sqrt{\left(\frac{3}{5} - \frac{5}{6}\right)^2 + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right)^2} = \sqrt{\frac{49}{900} + \frac{1}{900}} = \sqrt{\frac{1}{18}}$, dus C ligt ook op deze cirkel (en dus liggen A, B, C en D op één cirkel) 	1