Vraag	Antwoord	Scores

Onafhankelijk van *a*

1 **maximumscore 5**

- $f_a'(x) = a \cdot \mathrm{e}^{ax} + (1 + ax) \cdot \mathrm{e}^{ax} \cdot a$ 2
- $f_a'(x) = 0$ voor $x = -\dfrac{2}{a}$ 1
- $f_a(-\dfrac{2}{a}) = -\dfrac{1}{\mathrm{e}^2}$ (dus $P_a(-\dfrac{2}{a}, -\dfrac{1}{\mathrm{e}^2})$) 1
- Hieruit volgt dat alle punten P_a dezelfde y-coördinaat hebben, dus liggen al deze punten op één (horizontale) lijn 1

Vraag	Antwoord	Scores

2 **maximumscore 5**

- De oppervlakte van driehoek OAB is $\frac{1}{2a}$ 1
- De oppervlakte van het gebied begrensd door de grafiek van f_a, de x-as en de y-as is $\int_{-\frac{1}{a}}^{0} (1+ax)\cdot e^{ax} dx$ 1
- Een primitieve van $(1+ax)\cdot e^{ax}$ is $x\cdot e^{ax}$ 1
- $\left[x\cdot e^{ax}\right]_{-\frac{1}{a}}^{0} = \frac{1}{ea}$ (dus deze oppervlakte is $\frac{1}{ea}$) 1
- De oppervlakte van het gebied begrensd door de grafiek van f_a en het lijnstuk AB is dus $\frac{1}{2a} - \frac{1}{ea}$, dus de verhouding is $(\frac{1}{2a} - \frac{1}{ea}) : \frac{1}{ea} = (\frac{1}{2} - \frac{1}{e}) : \frac{1}{e}$, dus onafhankelijk van a 1

of

- De oppervlakte van het gebied begrensd door de grafiek van f_a, de x-as en de y-as is $\int_{-\frac{1}{a}}^{0} (1+ax)\cdot e^{ax} dx$ 1
- Een primitieve van $(1+ax)\cdot e^{ax}$ is $x\cdot e^{ax}$ 1
- $\left[x\cdot e^{ax}\right]_{-\frac{1}{a}}^{0} = \frac{1}{ea}$ (dus deze oppervlakte is $\frac{1}{ea}$) 1
- De oppervlakte van driehoek OAB is $\frac{1}{2a}$ 1
- De verhouding van deze oppervlakten is onafhankelijk van a, dus is ook de gevraagde verhouding onafhankelijk van a 1

of

- De grafiek van f_a en het bijbehorende lijnstuk AB ontstaan uit de grafiek van f_1 en het daarbij behorende lijnstuk AB door vermenigvuldiging ten opzichte van de y-as met factor $\frac{1}{a}$ 2
- Hierbij worden zowel de oppervlakte van de driehoek als de oppervlakte van het gebied begrensd door de grafiek van f_1, de x-as en de y-as vermenigvuldigd met $\frac{1}{a}$ 2
- De verhouding van deze oppervlakten is dus onafhankelijk van a en daarmee ook de gevraagde verhouding 1

Vraag	Antwoord	Scores

Het standaard proefglas

3 maximumscore 4

- Het volume (in mm^3) is $\int_{0,0}^{55,3} \pi\left(f(x)\right)^2 \mathrm{d}x$ — 1
- Beschrijven hoe deze integraal (met de GR) berekend kan worden — 1
- De uitkomst van deze integraal is (ongeveer) 7994 — 1
- Het antwoord: 8 (cm^3) — 1

4 maximumscore 5

- ($C(87{,}5; 32{,}5)$ is de top van de parabool, dus) een formule voor kromme *CD* is van de vorm $y = a(x - 87{,}5)^2 + 32{,}5$ — 2
- $D(155{,}0; 23{,}0)$ is een punt van de kromme *CD*, dus $23{,}0 = a(155{,}0 - 87{,}5)^2 + 32{,}5$ — 1
- Beschrijven hoe deze vergelijking opgelost kan worden — 1
- Dit geeft voor *a* de waarde –0,002 (of nauwkeuriger) (dus een formule voor kromme *CD* is $y = -0{,}002 \cdot (x - 87{,}5)^2 + 32{,}5$) — 1

of

- (De coördinaten van *C* zijn $(87{,}5; 32{,}5)$, dus) $\overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix} 87{,}5 \\ 32{,}5 \end{pmatrix}$ — 1
- ($\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC}$, dus) de coördinaten van *E* zijn (67,5; −9,5) — 1
- De kromme *OE* heeft een formule van de vorm $y = ax^2$, dus $-9{,}5 = a \cdot 67{,}5^2$ — 1
- Dit geeft voor *a* de waarde –0,002 (of nauwkeuriger) — 1
- Dus een formule voor kromme *CD* is $y = -0{,}002 \cdot (x - 87{,}5)^2 + 32{,}5$ — 1

5 maximumscore 6

- $50 \text{ ml} = 50\,000 \text{ mm}^3$ — 1
- Gevraagd wordt de waarde van *h* waarvoor $\int_{55,3}^{h} \pi\left(g(x)\right)^2 \mathrm{d}x = 50\,000$, waarbij *h* de *x*-coördinaat van *P* is — 1
- Een primitieve van $-x^2 + 175x - 6600$ is $-\frac{1}{3}x^3 + 87{,}5x^2 - 6600x$ — 1
- $\pi\left(\left(-\frac{1}{3}h^3 + 87{,}5h^2 - 6600h\right) - \left(-\frac{1}{3} \cdot 55{,}3^3 + 87{,}5 \cdot 55{,}3^2 - 6600 \cdot 55{,}3\right)\right) = 50\,000$ — 1
- Beschrijven hoe deze vergelijking opgelost kan worden — 1
- ($h \approx 81$, dus) de *x*-coördinaat van *P* is 81 — 1

Vraag	Antwoord	Scores

Lijn en cirkel

6 **maximumscore 6** (altijd alle punten toekennen)

- Een vergelijking van de lijn k door P en S (met x-coördinaat s) is $4x + s \cdot y - 4s = 0$ (of $\frac{x}{s} + \frac{y}{4} = 1$) — 1
- Dit geeft $\frac{|4 \cdot 2 + s \cdot 0 - 4s|}{\sqrt{16 + s^2}} = 2$ — 1
- Dit herleiden tot $|8 - 4s| = 2\sqrt{16 + s^2}$ — 1
- Dit geeft $(8 - 4s)^2 = 4(16 + s^2)$ — 1
- Dit herleiden tot $3s^2 - 16s = 0$ — 1
- Hieruit volgt (omdat $s > 0$) $s = 5\frac{1}{3}$ (dus de x-coördinaat van S is $5\frac{1}{3}$) — 1

of

- $PS = \sqrt{s^2 + 16}$ (met s de x-coördinaat van S) — 1
- $\frac{MQ}{MS} = \frac{PO}{PS}$ (omdat driehoek MQS gelijkvormig is met driehoek POS) — 1
- Dit geeft $\frac{2}{s - 2} = \frac{4}{\sqrt{s^2 + 16}}$ — 1
- Dit herleiden tot $4(s^2 + 16) = 16(s^2 - 4s + 4)$ — 1
- Dit herleiden tot $3s^2 - 16s = 0$ — 1
- Hieruit volgt (omdat $s > 0$) $s = 5\frac{1}{3}$ (dus de x-coördinaat van S is $5\frac{1}{3}$) — 1

of

- $QS = \sqrt{(s - 2)^2 - 2^2} = \sqrt{s^2 - 4s}$ (met s de x-coördinaat van S) — 1
- $\frac{MQ}{QS} = \frac{PO}{OS}$ (omdat driehoek MQS gelijkvormig is met driehoek POS) — 1
- Dit geeft $\frac{2}{\sqrt{s^2 - 4s}} = \frac{4}{s}$ — 1
- Dit herleiden tot $4s^2 = 16(s^2 - 4s)$ — 1
- Dit herleiden tot $3s^2 - 16s = 0$ — 1
- Hieruit volgt (omdat $s > 0$) $s = 5\frac{1}{3}$ (dus de x-coördinaat van S is $5\frac{1}{3}$) — 1

Vraag	Antwoord	Scores

7 **maximumscore 8**

- Een vergelijking van de gegeven cirkel is $(x-2)^2 + y^2 = 4$ — 1
- De coördinaten van $A(a,\ pa)$ invullen in deze vergelijking geeft $(a-2)^2 + (pa)^2 = 4$ — 1
- Omdat $OA = 3$ geldt $a^2 + (pa)^2 = 9$ — 1
- Beschrijven hoe op algebraïsche wijze met behulp van bovengenoemde vergelijkingen de waarde van a gevonden kan worden — 2
- $a = \frac{9}{4}$ — 1
- Invullen in $a^2 + (pa)^2 = 9$ geeft $p^2 = \frac{7}{9}$ — 1
- Hieruit volgt (omdat $p > 0$) $p = \frac{1}{3}\sqrt{7}$ (of een gelijkwaardige vorm) — 1

of

- Een vergelijking van de gegeven cirkel is $(x-2)^2 + y^2 = 4$ — 1
- Punt A is een snijpunt van de gegeven cirkel en de cirkel met middelpunt O en straal 3, die als vergelijking heeft $x^2 + y^2 = 9$ — 1
- Beschrijven hoe op algebraïsche wijze met behulp van bovengenoemde vergelijkingen de x-coördinaat van A gevonden kan worden — 1
- De x-coördinaat van A is $\frac{9}{4}$ — 1
- De y-coördinaat van A is dus $\frac{9}{4}p$ (omdat A op de lijn $y = px$ ligt) — 1
- Dit geeft: $(\frac{9}{4})^2 + (\frac{9}{4}p)^2 = 9$ — 1
- Dit herleiden tot $p^2 = \frac{7}{9}$ — 1
- Hieruit volgt (omdat $p > 0$) $p = \frac{1}{3}\sqrt{7}$ (of een gelijkwaardige vorm) — 1

of

- Het inzicht dat $p = \tan\alpha$ met $\angle MOA = \alpha$ — 2
- Toepassen van de cosinusregel in driehoek MOA geeft $2^2 = 2^2 + 3^2 - 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cos\alpha$ — 1
- Hieruit volgt $\cos\alpha = \frac{3}{4}$ — 2
- Een aanpak waarbij α een hoek is in een rechthoekige driehoek met schuine zijde 4 en rechthoekszijden 3 en $\sqrt{7}$ — 2
- Hieruit volgt $\tan\alpha = \frac{1}{3}\sqrt{7}$ (en dus $p = \frac{1}{3}\sqrt{7}$) (of een gelijkwaardige vorm) — 1

Vraag	Antwoord	Scores

Tussen twee sinusgrafieken

8 maximumscore 4

- De oppervlakte van V is $\int_{\frac{1}{3}\pi}^{\frac{4}{3}\pi} \left(f(x) - g(x) \right) \mathrm{d}x$ — 1
- Een primitieve van $f(x) - g(x)$ is $-\cos x + \cos(x + \frac{1}{3}\pi)$ — 2
- De oppervlakte van V is dus $\left[-\cos x + \cos(x + \frac{1}{3}\pi) \right]_{\frac{1}{3}\pi}^{\frac{4}{3}\pi} = 2$ — 1

9 maximumscore 4 (altijd alle punten toekennen)

- $f(x) + g(x) = 0$ geeft $\sin(-x) = \sin(x + \frac{1}{3}\pi)$ — 1
- Dit geeft $x = -\frac{1}{6}\pi + k \cdot \pi$, dus (bijvoorbeeld) $b = \frac{1}{6}\pi$ — 1
- Een toelichting dat het maximum van $f + g$ ligt bij $x = \frac{1}{3}\pi$ — 1
- Hieruit volgt (omdat $\frac{1}{2} \cdot \left(f(\frac{1}{3}\pi) + g(\frac{1}{3}\pi) \right) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ en omdat $\sin(\frac{1}{3}\pi + \frac{1}{6}\pi) = 1$) $a = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ — 1

Vraag	Antwoord	Scores

Drie vierkanten in een rechthoek

10 maximumscore 9

•	Een aanpak waarbij (bijvoorbeeld) de zijde van *A* *x* wordt genoemd	1
•	De lengte van de zijde van *B* is $30-x$	1
•	De lengte van de zijde van *C* is gelijk aan $20-(30-x)=x-10$	1
•	De oppervlakte van *D* is $20\cdot 30-x^2-(30-x)^2-(x-10)^2$	1
•	$(30-x)^2=900-60x+x^2$ en $(x-10)^2=x^2-20x+100$	1
•	Dus de oppervlakte van *D* is $600-x^2-900+60x-x^2-x^2+20x-100$	1
•	Deze uitdrukking vereenvoudigen tot $-3x^2+80x-400$	1
•	Beschrijven hoe op algebraïsche wijze berekend kan worden voor welke waarde van *x* (in het interval [10, 20]) dit maximaal is	1
•	De gevraagde lengte is $\frac{40}{3}$ (of $13\frac{1}{3}$)	1

of

•	Een aanpak waarbij (bijvoorbeeld) de zijde van *A* *x* wordt genoemd	1
•	De lengte van de zijde van *B* is $30-x$	1
•	De lengte van de zijde van *C* is gelijk aan $20-(30-x)=x-10$	1
•	De oppervlakte van *D* is maximaal als de totale oppervlakte van *A*, *B* en *C* minimaal is	1
•	De totale oppervlakte van *A*, *B* en *C* is $x^2+(30-x)^2+(x-10)^2$	1
•	$(30-x)^2=900-60x+x^2$ en $(x-10)^2=x^2-20x+100$	1
•	Dus de totale oppervlakte van *A*, *B* en *C* is $3x^2-80x+1000$	1
•	Beschrijven hoe op algebraïsche wijze berekend kan worden voor welke waarde van *x* (in het interval [10, 20]) dit minimaal is	1
•	De gevraagde lengte is $\frac{40}{3}$ (of $13\frac{1}{3}$)	1

of

•	Een aanpak waarbij (bijvoorbeeld) de zijde van *A* *x* wordt genoemd	1
•	De lengte van de zijde van *B* is $30-x$	1
•	De lengte van de zijde van *C* is gelijk aan $20-(30-x)=x-10$	1
•	De oppervlakte van *D* is $20\cdot 30-x^2-(30-x)^2-(x-10)^2$	1
•	$D'(x)=-2x+2(30-x)-2(x-10)$	2
•	Dit geeft $D'(x)=-6x+80$	1
•	Er moet (in het interval [10, 20]) gelden $D'(x)=0$, dus $-6x+80=0$	1
•	De gevraagde lengte is $\frac{40}{3}$ (of $13\frac{1}{3}$)	1

Vraag	Antwoord	Scores

Lus

11 maximumscore 6

- De snelheidsvector op tijdstip t is $\begin{pmatrix} 2t \\ 3t^2-1 \end{pmatrix}$ — 1
- Op de tijdstippen $t=-1$ en $t=1$ is de snelheidsvector respectievelijk $\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ — 1
- Dus de raaklijnen zijn evenwijdig als $2t=-(3t^2-1)$ of $2t=3t^2-1$ — 1
- $2t=3t^2-1$ geeft ($t=1$ of) $t=-\frac{1}{3}$, dus de benodigde tijd om van O naar A te bewegen is $\frac{2}{3}$ — 1
- $2t=-(3t^2-1)$ geeft ($t=-1$ of) $t=\frac{1}{3}$, dus de benodigde tijd om van B naar O te bewegen is $\frac{2}{3}$ — 1
- Hieruit volgt: de benodigde tijd om van A naar B te bewegen is ($2-\frac{2}{3}-\frac{2}{3}$ en dit is) ook $\frac{2}{3}$ — 1

of

- De snelheidsvector op tijdstip t is $\begin{pmatrix} 2t \\ 3t^2-1 \end{pmatrix}$ — 1
- Op de tijdstippen $t=-1$ en $t=1$ is de snelheidsvector respectievelijk $\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ — 1
- De drie benodigde tijden zijn (samen 2, dus zijn ze) even lang als elk van deze tijden $\frac{2}{3}$ is — 1
- Om aan te tonen dat de drie benodigde tijden even lang zijn, is het dus voldoende om aan te tonen dat het punt zich op het tijdstip $t=-\frac{1}{3}$ in A bevindt en dat het punt zich op het tijdstip $t=\frac{1}{3}$ in B bevindt — 1
- Op de tijdstippen $t=-\frac{1}{3}$ en $t=\frac{1}{3}$ is de snelheidsvector respectievelijk $\begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$ — 1
- Hieruit volgt dat de raaklijn aan de baan op de tijdstippen $t=-\frac{1}{3}$ en $t=\frac{1}{3}$ dus evenwijdig is met een van de raaklijnen in O (zodat het punt zich dan inderdaad in A respectievelijk B bevindt) (en dus geldt het gestelde) — 1

Vraag	Antwoord	Scores

Lijn door perforatie

12 **maximumscore 7** (altijd alle punten toekennen)

- $x = b$ is een nulpunt van zowel de noemer als de teller, dus alleen voor $x = b$ is een perforatie mogelijk 1
- $\dfrac{x-b}{x^2-b^2} = \dfrac{x-b}{(x-b)(x+b)} = \dfrac{1}{x+b}$ (met $x \neq -b$ en $x \neq b$)

  (of: $\lim\limits_{x \to b} \dfrac{x-b}{x^2-b^2} = \lim\limits_{x \to b} \dfrac{x-b}{(x-b)(x+b)} = \lim\limits_{x \to b} \dfrac{1}{x+b}$) 1
- Voor $x = b$ is $\dfrac{1}{x+b}$ gelijk aan $\dfrac{1}{2b}$ (of: $\lim\limits_{x \to b} \dfrac{1}{x+b} = \dfrac{1}{2b}$) (, dus $(b, \frac{1}{2b})$ is een perforatie) 1
- Er geldt: $\dfrac{1}{2b} = 4b + 1$ 1
- Dit herleiden tot $8b^2 + 2b - 1 = 0$ 1
- $(2b+1)(4b-1) = 0$ (of $b = \dfrac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 8 \cdot -1}}{16}$) 1
- Dit geeft $b = -\frac{1}{2}$ of $b = \frac{1}{4}$ 1

Vraag	Antwoord	Scores

Verschoven platen

13 maximumscore 4

- Driehoek POA is gelijkvormig met driehoek $PQ'Q$ — 1
- $\dfrac{PQ'}{PQ} = \dfrac{PO}{PA}$ en $PA = \sqrt{p^2 + 35^2}$ geeft $\dfrac{p+q}{280} = \dfrac{p}{\sqrt{p^2 + 1225}}$ — 2
- Hieruit volgt $p + q = \dfrac{280p}{\sqrt{p^2 + 1225}}$, dus $q = \dfrac{280p}{\sqrt{p^2 + 1225}} - p$ — 1

14 maximumscore 4

- $q'(p) = \dfrac{280 \cdot \sqrt{p^2 + 1225} \; - \; 280p \cdot \dfrac{2p}{2\sqrt{p^2 + 1225}}}{p^2 + 1225} - 1$ — 2
- Dus $q'(p) = \dfrac{280(p^2 + 1225) - 280p^2}{(p^2 + 1225) \cdot \sqrt{p^2 + 1225}} - 1$ — 1
- De rest van de herleiding — 1

15 maximumscore 6

- $q'(p) = 0$ geeft $\dfrac{343\,000}{(p^2 + 1225) \cdot \sqrt{p^2 + 1225}} - 1 = 0$ — 1
- Dit geeft $(p^2 + 1225)^{\frac{3}{2}} = 343\,000$ — 2
- Hieruit volgt $p^2 + 1225 = 4900$ — 1
- Dit geeft $p = \sqrt{3675}$ (of $p = 35\sqrt{3}$) — 1
- Het antwoord: $q = 3\sqrt{3675}$ (of $q = 105\sqrt{3}$) — 1