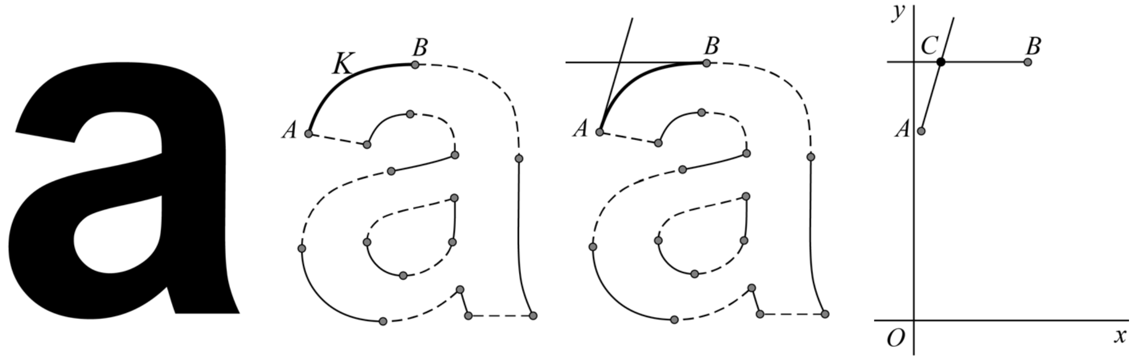
Letter op het computerbeeldscherm

De rand van een letter op een computerbeeldscherm is een aaneenschakeling van meerdere krommen. Zo is de rand van de (uitvergrote) letter ‘a’ in figuur 1 gemaakt met behulp van zestien krommen, die je in figuur 2 ziet.

figuur 1 **figuur 2** **figuur 3** **figuur 4**



Elk van de zestien krommen kan met een formule worden beschreven. Computers hebben die formules nodig om de letters op het scherm te kunnen tekenen. Als voorbeeld bekijken we de kromme K tussen A en B, die in figuur 2 dikker is getekend.

We gaan ervan uit dat er vier gegevens bekend zijn:

- de coördinaten van A;
- de coördinaten van B;
- de richting van de raaklijn in A aan de kromme;
- de richting van de raaklijn in B aan de kromme.

Zie figuur 3. De vraag is nu hoe je uit deze vier gegevens een formule voor de kromme K maakt.

In figuur 4 zie je de punten A en B en de twee raaklijnen, geplaatst in een assenstelsel. Gegeven is dat A de coördinaten $\left(\frac{1}{15}, \frac{4}{3}\right)$ heeft, B de coördinaten $\left(1, \frac{19}{10}\right)$, dat de raaklijn in B horizontaal is en dat de richtingscoëfficiënt van de raaklijn in A gelijk is aan 4. Het punt C is het snijpunt van de twee raaklijnen en speelt een belangrijke rol bij de constructie van de kromme K.

a Bereken exact de x-coördinaat van C.

Om de kromme K te kunnen construeren, worden er, behalve de drie vaste punten A, B en C, drie bewegende punten P, Q en R gebruikt. Deze bewegen als volgt:

- Punt P beweegt voor $0 \leq t \leq 1$ met een constante snelheid over lijnstuk AC van A naar C. Er geldt: $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + t \cdot \overrightarrow{AC}$
- Punt Q beweegt voor $0 \leq t \leq 1$ met een constante snelheid over lijnstuk CB van C naar B. Er geldt: $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OC} + t \cdot \overrightarrow{CB}$
- Terwijl punten P en Q bewegen, schuift punt R op het bewegende lijnstuk PQ van P naar Q. Er geldt: $\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OP} + t \cdot \overrightarrow{PQ}$

Het punt R doorloopt van $t = 0$ tot $t = 1$ een kromme van A naar B. Deze kromme wordt de **Bézierkromme** (van A, B en C) genoemd, en dat is kromme K uit figuur 2.

Figuur 4 is op de uitwerkbijlage uitvergroot weergegeven.

b Teken in de figuur op de uitwerkbijlage het punt R van de Bézierkromme dat hoort bij $t = 0,25$. Licht je werkwijze toe.

$\overrightarrow{OR}$ is uit te drukken in t, $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ en $\overrightarrow{OC}$. Er geldt voor elke waarde van t:

$$\overrightarrow{OR} = (1-t)^2 \cdot \overrightarrow{OA} + t^2 \cdot \overrightarrow{OB} + 2t(1-t) \cdot \overrightarrow{OC}$$

c Bewijs dit.

In de rest van deze opgave kijken we naar een ander voorbeeld. Het gaat niet meer om de letter ‘a’.
De coördinaten van A, B en C zijn nu als volgt: $A(0, 4)$, $B(2, 2)$ en $C(3, 0)$. Ook nu is C het snijpunt van de raaklijnen in A en B.

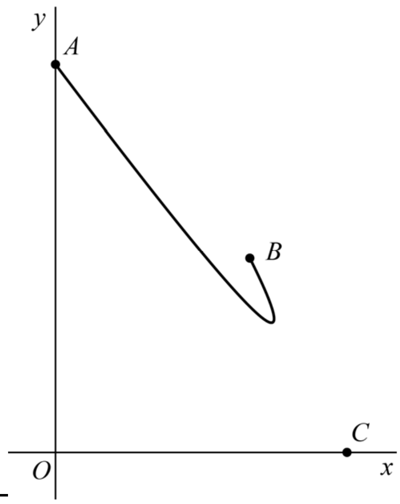
De Bézierkromme van A, B en C is, volgens de formule voor $\overrightarrow{OR}$, te beschrijven met behulp van vectoren. Het is echter ook mogelijk deze Bézierkromme met bewegingsvergelijkingen te beschrijven.

We bekijken het punt L met de volgende bewegingsvergelijkingen:

$$\begin{cases} x(t) = -4t^2 + 6t \\ y(t) = 6t^2 - 8t + 4 \end{cases} \quad \text{met } 0 \leq t \leq 1$$

De baan van L is weergegeven in figuur 5.

figuur 5



Er geldt: de baan van L is de Bézierkromme die hoort bij de punten A, B en C.

d Bewijs dit met behulp van de formule voor $\overrightarrow{OR}$.

b