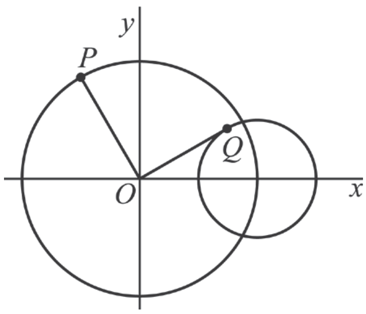
Cirkels en lijnen

Voor $0 \le t \le 2\pi$ beweegt een punt P over een cirkelvormige baan c_P met middelpunt $O(0, 0)$ volgens de bewegingsvergelijkingen:

$$\begin{cases} x_P(t) = 2\cos(t) \\ y_P(t) = 2\sin(t) \end{cases}$$

figuur 1



Voor $0 \le t \le 2\pi$ beweegt tegelijkertijd een punt Q over een cirkelvormige baan c_Q volgens de bewegingsvergelijkingen:

$$\begin{cases} x_Q(t) = 2 + \cos(t) \\ y_Q(t) = \sin(t) \end{cases}$$

Hoek POQ is afhankelijk van t. In figuur 1 zijn beide cirkels c_P en c_Q weergegeven. Ook zijn de lijnstukken OP en OQ weergegeven voor een waarde van t waarvoor OP en OQ loodrecht op elkaar staan.

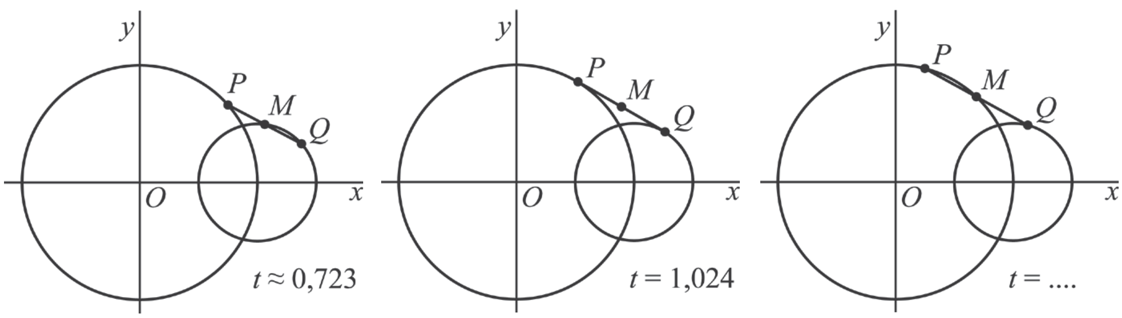
5p **11** Bereken exact de waarden van t waarvoor OP en OQ loodrecht op elkaar staan.

De lijn door P en Q snijdt de x-as in punt A. De x-coördinaat van A is onafhankelijk van t.

5p **12** Bewijs dit.

Punt M is het midden van lijnstuk PQ. Op $t = 0$ beginnen P en Q vanaf de x-as naar boven te bewegen. Punt M beweegt dan mee naar boven. In figuur 2, 3 en 4 is voor drie waarden van t de situatie weergegeven.

figuur 2 **figuur 3** **figuur 4**



Voor $t \approx 0{,}723$ ligt punt M op cirkel c_Q. Zie figuur 2.
Na $t \approx 0{,}723$ komt M in het gebied buiten c_Q te liggen. Zie figuur 3.
Op een zeker tijdstip ligt M op cirkel c_P. Zie figuur 4.
Punt M ligt een percentage van de tijd waarin de punten P en Q een volledige baan doorlopen buiten c_P en c_Q.

6p **13** Bereken dit percentage. Geef je eindantwoord als geheel getal.