

Vraag	Antwoord	Scores
-------	----------	--------

## Buigraaklijn

### 1 maximumscore 4

- $f'(x) = 6(2x-1)^2 \cdot 2 + 6(2x-1) \cdot 2$  2
- Herleiden tot  $f'(x) = 12(4x^2 - 4x + 1) + 24x - 12$  1
- Herleiden tot  $f'(x) = 48x^2 - 24x$  1

of

- $(2x-1)^2 = 4x^2 - 4x + 1$  1
- $(2x-1)^3 = 8x^3 - 12x^2 + 6x - 1$  1
- $f(x)$  herleiden tot  $f(x) = 16x^3 - 12x^2 + 1$  1
- $f'(x) = 48x^2 - 24x$  1

*Opmerking*

*Voor het eerste antwoordelement van het eerste antwoordalternatief mogen uitsluitend 0 of 2 scorepunten worden toegekend.*

### 2 maximumscore 5

- $f''(x) = 96x - 24$  1
- $f''(x) = 0$  geeft  $x = \frac{1}{4}$  1
- $f(\frac{1}{4}) = \frac{1}{2}$  1
- $f'(\frac{1}{4}) = -3$  1
- Een vergelijking van  $k$  is  $y = -3x + \frac{5}{4}$  1

Vraag	Antwoord	Scores
-------	----------	--------

### Op de diagonaal van een vierkant

#### 3 maximumscore 6

- Voor het kiezen van een assenstelsel met bijbehorende coördinaten, bijvoorbeeld  $A(0,0)$ ,  $D(0,2)$  en  $M(1,0)$  1
- Punt  $P$  heeft coördinaten  $(p, p)$  (met  $0 < p < 2$ ) 1
- $\overrightarrow{MP} = \begin{pmatrix} p-1 \\ p \end{pmatrix}$  en  $\overrightarrow{DP} = \begin{pmatrix} p \\ p-2 \end{pmatrix}$  1
- $\begin{pmatrix} p-1 \\ p \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p \\ p-2 \end{pmatrix} = 0$  1
- $p^2 - p + p^2 - 2p = 0$  geeft  $p = \frac{3}{2}$  ( $p = 0$  voldoet niet) 1
- $AP = \frac{3}{2}\sqrt{2}$  (of een gelijkwaardige uitdrukking) 1

of

- Voor het kiezen van een assenstelsel met bijbehorende coördinaten, bijvoorbeeld  $A(0,0)$ ,  $D(0,2)$  en  $M(1,0)$  1
- Punt  $P$  heeft coördinaten  $(p, p)$  (met  $0 < p < 2$ ) 1
- Lijn  $MP$  heeft rc  $\frac{p}{p-1}$  (voor  $p \neq 1$ ) en lijn  $DP$  heeft rc  $\frac{p-2}{p}$  1
- $\frac{p}{p-1} \cdot \frac{p-2}{p} = -1$  1
- Hieruit volgt  $p = \frac{3}{2}$  ( $p = 0$  voldoet niet) 1
- $AP = \frac{3}{2}\sqrt{2}$  (of een gelijkwaardige uitdrukking) 1

of

- Voor het kiezen van een assenstelsel met bijbehorende coördinaten, bijvoorbeeld  $A(0,0)$ ,  $D(0,2)$  en  $M(1,0)$  1
- Als  $DP$  en  $MP$  loodrecht op elkaar staan, dan ligt  $P$  op de cirkel met middellijn  $MD$  1
- (Dat is de cirkel met middelpunt  $(\frac{1}{2}, 1)$  en straal  $\sqrt{(\frac{1}{2})^2 + 1^2} = \sqrt{\frac{5}{4}}$ , dus) 1
- een vergelijking van deze cirkel is  $(x - \frac{1}{2})^2 + (y - 1)^2 = \frac{5}{4}$  1
- Snijden met de lijn  $AP$  met vergelijking  $y = x$  geeft  $(x - \frac{1}{2})^2 + (x - 1)^2 = \frac{5}{4}$ , dus  $2x^2 - 3x = 0$  1
- Dit geeft  $x = \frac{3}{2}$  ( $x = 0$  voldoet niet) 1
- $AP = \frac{3}{2}\sqrt{2}$  (of een gelijkwaardige uitdrukking) 1

of

Vraag	Antwoord	Scores
	<ul style="list-style-type: none"> <li>Voor het kiezen van een assenstelsel met bijbehorende coördinaten, bijvoorbeeld <math>A(0, 0)</math>, <math>D(0, 2)</math> en <math>M(1, 0)</math></li> </ul>	1
	<ul style="list-style-type: none"> <li>Punt <math>P</math> heeft coördinaten <math>(p, p)</math> (met <math>0 &lt; p &lt; 2</math>)</li> </ul>	1
	<ul style="list-style-type: none"> <li>Een redenering waaruit volgt dat <math>\angle DPR = \angle PMQ</math> (of <math>\angle RDP = \angle QPM</math>) (met <math>R</math> de loodrechte projectie van <math>P</math> op <math>CD</math> en <math>Q</math> de loodrechte projectie van <math>P</math> op <math>AB</math>)</li> </ul>	1
	<ul style="list-style-type: none"> <li>Ook geldt (omdat <math>D(0, 2)</math>, <math>R(p, 2)</math>, <math>P(p, p)</math> en <math>Q(p, 0)</math>) <math>DR = PQ</math>, dus <math>\triangle PRD \cong \triangle MQP</math></li> </ul>	1
	<ul style="list-style-type: none"> <li><math>MQ = PR</math> geeft <math>p - 1 = 2 - p</math> ofwel <math>p = \frac{3}{2}</math></li> </ul>	1
	<ul style="list-style-type: none"> <li><math>AP = \frac{3}{2}\sqrt{2}</math> (of een gelijkwaardige uitdrukking)</li> </ul>	1
	of	
	<ul style="list-style-type: none"> <li>Een redenering waaruit volgt dat <math>\angle DPR = \angle PMQ</math> (of <math>\angle RDP = \angle QPM</math>) (met <math>R</math> de loodrechte projectie van <math>P</math> op <math>CD</math> en <math>Q</math> de loodrechte projectie van <math>P</math> op <math>AB</math>)</li> </ul>	1
	<ul style="list-style-type: none"> <li>Ook geldt <math>DR = PQ</math>, dus <math>\triangle PRD \cong \triangle MQP</math></li> </ul>	1
	<ul style="list-style-type: none"> <li>Dus <math>MQ = PR</math> en (omdat <math>\angle PCR = 45^\circ</math>) <math>PR = RC</math></li> </ul>	1
	<ul style="list-style-type: none"> <li>Dus <math>MQ = PR = RC = BQ</math> en dus is <math>Q</math> het midden van <math>MB</math></li> </ul>	1
	<ul style="list-style-type: none"> <li>Hieruit volgt <math>AQ : QB = 3 : 1</math></li> </ul>	1
	<ul style="list-style-type: none"> <li><math>AP = \frac{3}{2}\sqrt{2}</math> (want <math>\triangle AQP</math> is gelijkvormig met <math>\triangle ABC</math>) (of een gelijkwaardige uitdrukking)</li> </ul>	1
	of	
	<ul style="list-style-type: none"> <li>Voor het kiezen van een assenstelsel met bijbehorende coördinaten, bijvoorbeeld <math>A(0, 0)</math>, <math>D(0, 2)</math> en <math>M(1, 0)</math></li> </ul>	1
	<ul style="list-style-type: none"> <li>Punt <math>P</math> heeft coördinaten <math>(p, p)</math> (met <math>0 &lt; p &lt; 2</math>)</li> </ul>	1
	<ul style="list-style-type: none"> <li><math>DP = \sqrt{p^2 + (2-p)^2}</math> en <math>MP = \sqrt{p^2 + (p-1)^2}</math> en <math>MD = \sqrt{5}</math></li> </ul>	1
	<ul style="list-style-type: none"> <li><math>DP \perp MP</math> als <math>p^2 + (2-p)^2 + p^2 + (p-1)^2 = 5</math></li> </ul>	1
	<ul style="list-style-type: none"> <li>Hieruit volgt <math>p = \frac{3}{2}</math> (<math>p = 0</math> voldoet niet)</li> </ul>	1
	<ul style="list-style-type: none"> <li><math>AP = \frac{3}{2}\sqrt{2}</math> (of een gelijkwaardige uitdrukking)</li> </ul>	1

Vraag	Antwoord	Scores
-------	----------	--------

### Golvend ertussendoor

#### 4 maximumscore 5

- $f'(x) = -\frac{\cos(x)}{2\sin^2(x)}$  (of een gelijkwaardige uitdrukking) 2
- $f'(x) = 0$  geeft  $\cos(x) = 0$  (en  $2\sin^2(x) \neq 0$ ) 1
- $f(\frac{1}{2}\pi) = \frac{1}{2}$  en  $f(\frac{3}{2}\pi) = -\frac{1}{2}$  1
- Het bereik is  $y \leq -\frac{1}{2}$  of  $y \geq \frac{1}{2}$  1

of

- $f$  heeft een minimum als  $\sin(x)$  maximaal is 1
- $\sin(x)$  is maximaal 1 dus het minimum van  $f$  is  $\frac{1}{2}$  1
- $f$  heeft een maximum als  $\sin(x)$  minimaal is 1
- $\sin(x)$  is minimaal  $-1$  dus het maximum van  $f$  is  $-\frac{1}{2}$  1
- Het bereik is  $y \leq -\frac{1}{2}$  of  $y \geq \frac{1}{2}$  1

*Opmerking*

*Voor het eerste antwoordelement van het eerste antwoordalternatief mogen uitsluitend 0 of 2 scorepunten worden toegekend.*

Vraag	Antwoord	Scores
-------	----------	--------

**5 maximumscore 5**

- $a \cos(x) = \frac{1}{2 \sin(x)}$  geeft  $2a \cos(x) \sin(x) = 1$  1
- (Voor  $a = 0$  zijn er geen oplossingen en voor  $a \neq 0$  geldt:)  $a \sin(2x) = 1$  en dit geeft  $\sin(2x) = \frac{1}{a}$  1
- Deze vergelijking heeft alleen oplossingen als  $-1 \leq \frac{1}{a} \leq 1$  1
- Dus er zijn geen oplossingen als  $\frac{1}{a} > 1$  (dus  $0 < a < 1$ ) en als  $\frac{1}{a} < -1$  (dus  $-1 < a < 0$ ) 1
- Dus voor  $-1 < a < 1$  hebben de grafieken geen punten gemeenschappelijk 1

of

- $f(x) = g(x)$  geeft  $a \cos(x) = \frac{1}{2 \sin(x)}$  dus  $a = \frac{1}{2 \cos(x) \sin(x)}$  en  $f'(x) = g'(x)$  geeft  $-\frac{\cos(x)}{2 \sin^2(x)} = -a \sin(x)$  1
- Substitutie van  $a$  geeft  $-\frac{\cos(x)}{2 \sin^2(x)} = \frac{-\sin(x)}{2 \cos(x) \sin(x)}$  (of  $\frac{\cos(x)}{\sin^2(x)} = \frac{1}{\cos(x)}$ ) 1
- Hieruit volgt  $\cos^2(x) = \sin^2(x)$  dus  $x = \frac{1}{4} \pi + k \cdot \frac{1}{2} \pi$  1
- Dan volgt  $a = 1$  of  $a = -1$  1
- Dus voor  $-1 < a < 1$  hebben de grafieken geen punten gemeenschappelijk 1

Vraag	Antwoord	Scores
-------	----------	--------

## Efficiënt testen

### 6 maximumscore 4

- $\frac{dT}{dn} = 1000 \cdot \left( -\frac{1}{n^2} - \ln(0,8) \cdot 0,8^n \right)$  2
- Voor  $n = 4$  geeft dit de waarde 28,8... 1
- Deze waarde is positief dus het laagste punt ligt links van  $n = 4$  1

*Opmerking*

Voor het eerste antwoordelement mogen uitsluitend 0 of 2 scorepunten worden toegekend.

### 7 maximumscore 4

- $T(n) = T(n+1)$  geeft  $N \cdot \left( 1 + \frac{1}{n} - (1-p)^n \right) = N \cdot \left( 1 + \frac{1}{n+1} - (1-p)^{n+1} \right)$  1
- Herleiden tot  $(1-p)^n - (1-p)^{n+1} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$  1
- $(1-p)^n - (1-p)^{n+1} = (1-p)^n (1 - (1-p)) = p(1-p)^n$  1
- Voor de rest van de herleiding 1

of

- $T(n) = T(n+1)$  geeft  $N \cdot \left( 1 + \frac{1}{n} - (1-p)^n \right) = N \cdot \left( 1 + \frac{1}{n+1} - (1-p)^{n+1} \right)$  1
- Herleiden tot  $\frac{1}{n} - (1-p)^n = \frac{1}{n+1} - (1-p)^{n+1}$  1
- Dit vervolgens herleiden tot  $1 = n(n+1) \left( (1-p)^n - (1-p)^{n+1} \right)$  1
- $(1-p)^n - (1-p)^{n+1} = (1-p)^n (1 - (1-p)) = p(1-p)^n$  (en de rest van de herleiding) 1

### 8 maximumscore 3

- Als  $p = 0,025$ , dan volgt uit de tabel dat  $n = 7$  1
- De vergelijking  $750 = N \cdot \left( 1 + \frac{1}{7} - (1-0,025)^7 \right)$  moet worden opgelost 1
- Het gevraagde aantal monsters is 2456 1

*Opmerking*

Voor het antwoord 2457 geen scorepunten in mindering brengen.

Vraag	Antwoord	Scores
-------	----------	--------

**Begrensde gebieden**

**9 maximumscore 7**

- De integraal  $\int_0^q f(x)dx$  moet worden berekend 1
- Een primitieve van  $\frac{4}{\sqrt{x+1}}$  is  $8\sqrt{x+1}$  1
- De oppervlakte onder de grafiek is  $8\sqrt{q+1}-8$  1
- De oppervlakte van de rechthoek is  $4q$ , de oppervlakte onder de grafiek is dus  $2q$  1
- $8\sqrt{q+1}-8=2q$  herleiden tot  $64(q+1)=(8+2q)^2$  1
- Dit geeft  $4q^2-32q=0$  1
- $q=8$  1

**10 maximumscore 5**

- Voor de inverse functie  $g$  geldt  $x = \frac{4}{\sqrt{y+1}}$  dus  $\sqrt{y+1} = \frac{4}{x}$  1
- Dit herleiden tot  $y = \frac{16}{x^2} - 1$  1
- Beschrijven hoe de  $x$ -coördinaat van het snijpunt van de grafiek van  $f$  met de grafiek van  $g$  met de GR gevonden kan worden 1
- Deze  $x$ -coördinaat is 2,22... 1
- $\int_{2,22...}^4 \left( \frac{4}{\sqrt{x+1}} - \frac{16}{x^2} + 1 \right) dx = 2,10...$  dus de gevraagde oppervlakte is 2,1 1

of

- Beschrijven hoe de  $x$ -coördinaat van het snijpunt van de grafiek van  $f$  met de lijn  $y = x$  met de GR gevonden kan worden 1
- Deze  $x$ -coördinaat is 2,22... 1
- Er geldt:  $\int_{2,22...}^4 (f(x) - g(x)) dx = \int_{2,22...}^4 f(x) dx - \left( \int_0^{2,22...} f(x) dx - (2,22...) \right)^2$  2
- (Dit geeft  $3,51... - (6,37... - (2,22...) \dots)^2 = 2,10...$  dus) de gevraagde oppervlakte is 2,1 1

*Opmerking*

*Voor het derde antwoordelement van het tweede antwoordalternatief mogen uitsluitend 0 of 2 scorepunten worden toegekend.*

Vraag	Antwoord	Scores
-------	----------	--------

### Cirkels en lijnen

**11 maximumscore 5**

- Er geldt:  $\overline{OP} = \begin{pmatrix} 2\cos(t) \\ 2\sin(t) \end{pmatrix}$  en  $\overline{OQ} = \begin{pmatrix} 2 + \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$  1
- Er moet gelden:  $\overline{OP} \cdot \overline{OQ} = 0$ , dus  $\begin{pmatrix} 2\cos(t) \\ 2\sin(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 + \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} = 0$  1
- Hieruit volgt  $4\cos(t) + 2\cos^2(t) + 2\sin^2(t) = 0$  (of een gelijkwaardige uitdrukking) 1
- Herleiden tot  $\cos(t) = -\frac{1}{2}$  1
- De oplossingen:  $t = \frac{2}{3}\pi$  en  $t = \frac{4}{3}\pi$  1

of

- Er geldt:  $rc_{OP} = \frac{2\sin(t)}{2\cos(t)}$  (met  $\cos(t) \neq 0$ ) en  $rc_{OQ} = \frac{\sin(t)}{2 + \cos(t)}$  1
- Er moet gelden:  $rc_{OP} \cdot rc_{OQ} = -1$ , dus  $\frac{2\sin(t) \cdot \sin(t)}{2\cos(t)(2 + \cos(t))} = -1$  1
- Hieruit volgt  $\sin^2(t) + 2\cos(t) + \cos^2(t) = 0$  (of een gelijkwaardige uitdrukking) 1
- Herleiden tot  $\cos(t) = -\frac{1}{2}$  1
- De oplossingen:  $t = \frac{2}{3}\pi$  en  $t = \frac{4}{3}\pi$  1



Vraag	Antwoord	Scores
-------	----------	--------

**12 maximumscore 5**

- Er geldt:  $\overrightarrow{QP} = \begin{pmatrix} \cos(t) - 2 \\ \sin(t) \end{pmatrix}$  1

- Een vectorvoorstelling van de lijn door  $P$  en  $Q$  is 
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cos(t) \\ 2 \sin(t) \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} \cos(t) - 2 \\ \sin(t) \end{pmatrix}$$
 2

- Voor het snijpunt met de  $x$ -as geldt:  $y = 0$ , dus  $r = -2$  1

- Dus  $x = 2 \cos(t) + -2(\cos(t) - 2) = 4$  (en dat is onafhankelijk van  $t$ ) 1

of

- Er geldt:  $rc_{PQ} = \frac{\sin(t)}{\cos(t) - 2}$  1

- Een vergelijking van de lijn door  $P$  en  $Q$  is 
$$y = \frac{\sin(t)}{\cos(t) - 2} (x - 2 \cos(t)) + 2 \sin(t)$$
 (of een gelijkwaardige uitdrukking) 2

- Voor het snijpunt met de  $x$ -as geldt:  $\frac{\sin(t)}{\cos(t) - 2} (x - 2 \cos(t)) + 2 \sin(t) = 0$  1

- Dus  $x = -2 \sin(t) \cdot \frac{\cos(t) - 2}{\sin(t)} + 2 \cos(t) = 4$  (en dat is onafhankelijk van  $t$ ) 1

of

- Omdat  $P$  en  $Q$  dezelfde hoeksnelheid hebben, is driehoek  $AOP$  gelijkvormig met driehoek  $ANQ$  ( $N$  is het middelpunt van  $c_Q$ ) 1

- Dus  $\frac{OA}{NA} = \frac{OP}{NQ}$  1

- Hieruit volgt  $\frac{2 + NA}{NA} = \frac{2}{1}$  1

- Hieruit volgt  $NA = 2$  1

- Dus de  $x$ -coördinaat van  $A$  is  $4$  (en dat is onafhankelijk van  $t$ ) 1

*Opmerking*

*Voor het tweede antwoordelement van zowel het eerste als het tweede antwoordalternatief mogen uitsluitend 0 of 2 scorepunten worden toegekend.*

Vraag	Antwoord	Scores
-------	----------	--------

**13 maximumscore 6**

- Er geldt:  $M\left(1 + \frac{3}{2}\cos(t), \frac{3}{2}\sin(t)\right)$  1
- Een vergelijking van  $c_P$  is  $x^2 + y^2 = 4$  1
- $M$  ligt in het buitengebied totdat  $M$  op  $c_P$  ligt, dus de vergelijking  $\left(1 + \frac{3}{2}\cos(t)\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\sin(t)\right)^2 = 4$  moet worden opgelost 1
- Beschrijven hoe deze vergelijking (met de GR) kan worden opgelost 1
- Dit geeft  $t = 1,318\dots$  1
- (De baan is symmetrisch ten opzichte van de  $x$ -as, dus)  $\frac{2(1,318\dots - 0,723)}{2\pi} = 0,1894\dots$  dus het gevraagde percentage is 19% 1

of

- Een vergelijking van  $c_P$  is  $x^2 + y^2 = 4$  1
- Er geldt:  $M\left(1 + \frac{3}{2}\cos(t), \frac{3}{2}\sin(t)\right)$ , dus een vergelijking van  $c_M$  is  $(x-1)^2 + y^2 = 1,5^2$  1
- Beschrijven hoe de snijpunten van  $c_P$  en  $c_M$  (met de GR) gevonden kunnen worden 1
- Dit geeft  $x = 1,375$  dus  $1 + \frac{3}{2}\cos(t) = 1,375$  1
- Dit geeft  $t = 1,318\dots$  1
- (De baan is symmetrisch ten opzichte van de  $x$ -as, dus)  $\frac{2(1,318\dots - 0,723)}{2\pi} = 0,1894\dots$  dus het gevraagde percentage is 19% 1

Vraag	Antwoord	Scores
-------	----------	--------

## Asymptoot

### 14 maximumscore 3

- Voor  $x < 1$  geldt:  $f(x) = -x + 1 + \frac{x-5}{2x-5}$  1
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-5}{2x-5} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1-\frac{5}{x}}{2-\frac{5}{x}} = \frac{1}{2}$  (of: een redenering als “voor grote negatieve waarden van  $x$  gaat de breuk  $\frac{x-5}{2x-5}$  naar  $\frac{1}{2}$ ”) 1
- Een vergelijking van lijn  $k$  is  $y = -x + 1\frac{1}{2}$  1

### 15 maximumscore 6

- (Het snijpunt met de  $x$ -as ligt rechts van het knikpunt, dus)  
 $x - 1 + \frac{x-5}{2x-5} = 0$  1
- Dit herleiden tot  $x-5 = (2x-5)(1-x)$  (of een gelijkwaardige uitdrukking zonder gebroken vormen) 1
- Herleiden tot  $2x^2 - 6x = 0$  1
- Dit geeft  $x = 3$  ( $x = 0$  voldoet niet) 1
- ( $x = 2\frac{1}{2}$  is een nulpunt van de noemer en niet van de teller van  $\frac{x-5}{2x-5}$ , dus) de grafiek heeft een verticale asymptoot met vergelijking  $x = 2\frac{1}{2}$  1
- De grafiek van  $f$  ligt onder de  $x$ -as voor  $2\frac{1}{2} < x < 3$  1

Vraag	Antwoord	Scores
-------	----------	--------

**Twee punten op een grafiek**

**16 maximumscore 5**

- Er geldt:  $P(p, p \cdot e^p)$  en  $Q(2p, 2p \cdot e^{2p})$  1
- De richtingscoëfficiënt van de lijn door  $P$  en  $Q$  is  $\frac{2p \cdot e^{2p} - p \cdot e^p}{p}$  1
- Er moet gelden:  $2 \cdot e^{2p} - e^p = 6$  1
- Beschrijven hoe uit deze vergelijking een exacte waarde voor  $e^p$  gevonden kan worden 1
- Dit geeft (omdat  $e^p = -\frac{3}{2}$  geen oplossing heeft)  $p = \ln(2)$  1

of

- Er geldt:  $P(p, p \cdot e^p)$  en  $Q(2p, 2p \cdot e^{2p})$  1
- Een vergelijking van de lijn door  $P$  en  $Q$  is  $y = 6x + b$ ; invullen van de coördinaten van  $P$  geeft  $b = p \cdot e^p - 6p$  1
- Uit invullen van de coördinaten van  $Q$  in  $y = 6x + p \cdot e^p - 6p$  volgt  $2 \cdot e^{2p} - e^p = 6$  1
- Beschrijven hoe uit deze vergelijking een exacte waarde voor  $e^p$  gevonden kan worden 1
- Dit geeft (omdat  $e^p = -\frac{3}{2}$  geen oplossing heeft)  $p = \ln(2)$  1