

Vraag	Antwoord	Scores
-------	----------	--------

Inverse van $\ln(x)$

1 maximumscore 3

- (Bij de functie f_p hoort de vergelijking $y = p \cdot \ln(x)$ dus) bij de inverse functie van f_p hoort de vergelijking $x = p \cdot \ln(y)$ 1

- Dan is $\frac{x}{p} = \ln(y)$, dus $y = e^{\frac{x}{p}}$ (en dat is een vergelijking die past bij g_p) 2

of

- (Bij de functie g_p hoort de vergelijking $y = e^{\frac{x}{p}}$ dus) bij de inverse functie van g_p hoort de vergelijking $x = e^{\frac{y}{p}}$ 1

- Dan is $\frac{y}{p} = \ln(x)$, dus $y = p \ln(x)$ (en dat is een vergelijking die past bij f_p) 2

of

- Er moet gelden: $g_p(f_p(x)) = x$ (voor alle x) 1

- $g_p(f_p(x)) = e^{\frac{p \ln(x)}{p}} = e^{\ln(x)} = x$ (dus g_p is de inverse van f_p) 2

of

- Er moet gelden: $f_p(g_p(x)) = x$ (voor alle x) 1

- $f_p(g_p(x)) = p \ln\left(e^{\frac{x}{p}}\right) = p \cdot \frac{x}{p} = x$ (dus f_p is de inverse van g_p) 2

of

Vraag	Antwoord	Scores
-------	----------	--------

- De standaardfuncties f_1 en g_1 zijn elkaars inverse 1
- De grafiek van f_p ontstaat uit de grafiek van f_1 door een vermenigvuldiging met p ten opzichte van de x -as 1
- De grafiek van g_p ontstaat uit de grafiek van g_1 door een vermenigvuldiging met p ten opzichte van de y -as (dus f_p en g_p zijn elkaars inverse) 1

Opmerking

Voor het tweede antwoordelement van het eerste, tweede, derde en vierde antwoordalternatief mogen uitsluitend 0 of 2 scorepunten worden toegekend.

2 maximumscore 5

- Beschrijven hoe het snijpunt van de grafieken van f_{-1} en g_{-1} (of het snijpunt van een van beide grafieken met de lijn $y = x$) gevonden kan worden 1
- De grafieken van f_{-1} en g_{-1} snijden elkaar voor $x = 0,567\dots$ 1
- $\int_0^{0,567\dots} g_{-1}(x) dx + \int_{0,567\dots}^1 f_{-1}(x) dx$ moet worden berekend 1
- Beschrijven hoe deze integralen kunnen worden berekend 1
- De gevraagde oppervlakte is $(0,432\dots + 0,111\dots =) 0,54$ 1

of

- Beschrijven hoe het snijpunt van de grafieken van f_{-1} en g_{-1} (of het snijpunt van een van beide grafieken met de lijn $y = x$) gevonden kan worden 1
- De grafieken van f_{-1} en g_{-1} snijden elkaar voor $x = 0,567\dots$ 1
- $2 \cdot \int_0^{0,567\dots} (g_{-1}(x) - x) dx$ moet worden berekend 1
- Beschrijven hoe deze integraal kan worden berekend 1
- De gevraagde oppervlakte is $0,54$ 1

Vraag	Antwoord	Scores
-------	----------	--------

3 maximumscore 4

- $f_p'(x) = \frac{p}{x}$ 1
- Er moet gelden $f_p'(x) = 1$, en hieruit volgt $p = x$ 1
- Er moet gelden $f_p(x) = x$, dus $p \ln(p) = p$ 1
- De oplossing: $p = e$ ($p = 0$ voldoet niet) 1

of

- $g_p'(x) = \frac{1}{p} e^{\frac{x}{p}}$ 1
- Er moet gelden $g_p(x) = x$ en $g_p'(x) = 1$, dus $e^{\frac{x}{p}} = x$ en $\frac{1}{p} e^{\frac{x}{p}} = 1$ 1
- Hieruit volgt $p = x$ 1
- Uit $e^{\frac{x}{p}} = x$ met $p = x$ volgt: $p = e$ 1

Opmerking

Als een kandidaat alleen opmerkt dat moet gelden $f_p(x) = g_p(x) = x$ en

$f_p'(x) = g_p'(x) = 1$, voor deze vraag 1 scorepunt toekennen.

Vraag	Antwoord	Scores
-------	----------	--------

Letter op het computerbeeldscherm

4 maximumscore 3

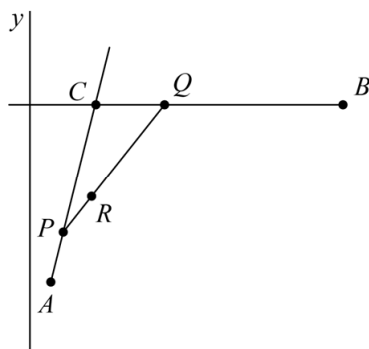
- Een vergelijking van de raaklijn in B is $y = \frac{19}{10}$ 1
- Een vergelijking van de raaklijn in A is $y - \frac{4}{3} = 4(x - \frac{1}{15})$ (of een gelijkwaardige uitdrukking) 1
- $\frac{19}{10} - \frac{4}{3} = 4(x - \frac{1}{15})$ oplossen geeft $x = \frac{5}{24}$ 1

5 maximumscore 3

- Het tekenen van punt P met $\vec{OP} = \vec{OA} + 0,25 \cdot \vec{AC}$ (of P op lijnstuk AC zo dat $AP = 0,25 \cdot AC$) 1
- Het tekenen van punt Q met $\vec{OQ} = \vec{OC} + 0,25 \cdot \vec{CB}$ (of Q op lijnstuk CB zo dat $CQ = 0,25 \cdot CB$) 1
- Het tekenen van punt R met $\vec{OR} = \vec{OP} + 0,25 \cdot \vec{PQ}$ (of R op lijnstuk PQ zo dat $PR = 0,25 \cdot PQ$) 1

of

- $\vec{OP} = \vec{OA} + 0,25 \cdot \vec{AC} = \begin{pmatrix} 0,066\dots \\ 1,333\dots \end{pmatrix} + 0,25 \cdot \begin{pmatrix} 0,141\dots \\ 0,566\dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,102\dots \\ 1,475 \end{pmatrix}$ en 1
- $\vec{OQ} = \vec{OC} + 0,25 \cdot \vec{CB} = \begin{pmatrix} 0,208\dots \\ 1,9 \end{pmatrix} + 0,25 \cdot \begin{pmatrix} 0,791\dots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,406\dots \\ 1,9 \end{pmatrix}$ 1
- $\vec{OR} = \vec{OP} + 0,25 \cdot \vec{PQ} = \begin{pmatrix} 0,102\dots \\ 1,475 \end{pmatrix} + 0,25 \cdot \begin{pmatrix} 0,304\dots \\ 0,425 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,178\dots \\ 1,581\dots \end{pmatrix}$ 1
- Het bepalen van de schaal (bijvoorbeeld met behulp van de afstand van punt B tot de y -as) geeft 6,7:1 en vervolgens het tekenen van punt R 1



Opmerking 1

Voor elk van de drie punten geldt: een afwijking van maximaal 1 mm is toegestaan. Als P en/of Q niet binnen de marge zijn getekend, maar R wel is getekend, uitgaande van de getekende P en Q, en wél binnen de marge van 1 mm, dan voor R geen scorepunt in mindering brengen.

Vraag	Antwoord	Scores
-------	----------	--------

Opmerking 2

Als een kandidaat vraag 5 oplost volgens het tweede alternatief en daarvoor een foutieve waarde van de x-coördinaat van C gebruikt (zoals berekend in opgave 4), hiervoor geen punten in mindering brengen.

6 maximumscore 5

Een herleiding

- waarin minimaal twee van de volgende zes formules zijn gebruikt:
 $\overline{OP} = \overline{OA} + t \cdot \overline{AC}$, $\overline{OQ} = \overline{OC} + t \cdot \overline{CB}$, $\overline{OR} = \overline{OP} + t \cdot \overline{PQ}$, $\overline{AC} = \overline{OC} - \overline{OA}$,
 $\overline{CB} = \overline{OB} - \overline{OC}$, $\overline{PQ} = \overline{OQ} - \overline{OP}$ 1
- waarin minimaal vier van de hierboven genoemde formules zijn gebruikt 1
- waarin alle zes hierboven genoemde formules zijn gebruikt 1
- van \overline{OR} tot een formule zonder haakjes uitgedrukt in t , \overline{OA} , \overline{OB} en \overline{OC} , bijvoorbeeld
 $\overline{OA} + t \cdot \overline{OC} - t \cdot \overline{OA} + t \cdot \overline{OC} + t^2 \cdot \overline{OB} - t^2 \cdot \overline{OC} - t \cdot \overline{OA} - t^2 \cdot \overline{OC} + t^2 \cdot \overline{OA}$ 1
- van \overline{OR} tot $\overline{OR} = (1-t)^2 \cdot \overline{OA} + t^2 \cdot \overline{OB} + 2t(1-t) \cdot \overline{OC}$ 1

7 maximumscore 3

- $\overline{OR} = (1-t)^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} + t^2 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + 2t(1-t) \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ 1
- $\overline{OR} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4(1-t)^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2t^2 \\ 2t^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6t(1-t) \\ 0 \end{pmatrix}$ 1
- Dus $\overline{OR} = \begin{pmatrix} 2t^2 + 6t - 6t^2 \\ 4 - 8t + 4t^2 + 2t^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4t^2 + 6t \\ 6t^2 - 8t + 4 \end{pmatrix}$ 1

of

- $\overline{OR} = (1-t)^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} + t^2 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + 2t(1-t) \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ 1
- $x(t) = 2 \cdot t^2 + 3 \cdot 2t(1-t)$ en $y(t) = 4 \cdot (1-t)^2 + 2 \cdot t^2$ 1
- Voor de rest van de herleiding 1

Vraag	Antwoord	Scores
-------	----------	--------

Gebroken sinusfunctie

8 maximumscore 8

- De gemeenschappelijke punten kunnen gevonden worden met de vergelijking $\frac{\sin(x)}{\sin(2x)} = \sin(x)$ 1
- $(\sin(x) = \sin(x)\sin(2x) \text{ geeft } \sin(x) = 0 \text{ of } \sin(2x) = 1$ 1
- $\sin(2x) = 1$ geeft $2x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$ ($\sin(x) = 0$ voldoet niet) 1
- Op het domein geeft dit $x = \frac{1}{4}\pi$ of $x = -\frac{3}{4}\pi$ 1
- $f'(x) = \frac{\cos(x) \cdot \sin(2x) - \sin(x) \cdot 2\cos(2x)}{\sin^2(2x)}$ (of een gelijkwaardige vorm) 2
- $g'(x) = \cos(x)$ 1
- $f'(\frac{1}{4}\pi) = g'(\frac{1}{4}\pi) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ en $f'(-\frac{3}{4}\pi) = g'(-\frac{3}{4}\pi) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$, dus de grafieken van f en g raken elkaar in twee punten 1

Opmerkingen

- *Voor het vijfde antwoordelement mogen uitsluitend 0 of 2 scorepunten worden toegekend.*
- *Als een kandidaat alleen opmerkt dat moet gelden $f(x) = g(x)$ en $f'(x) = g'(x)$, voor deze vraag 1 scorepunt toekennen.*

Vraag	Antwoord	Scores
-------	----------	--------

Raaklijn verschuiven

9 maximumscore 4

- $x^2 - 2x\sqrt{x} + x = 0$ geeft $x = 0$ of $x - 2\sqrt{x} + 1 = 0$ 1
- $x - 2\sqrt{x} + 1 = 0$ geeft $(\sqrt{x} - 1)^2 = 0$ 1
- Dit geeft $x = 1$ 1
- De enige twee oplossingen zijn $x = 0$ en $x = 1$ 1

of

- $x^2 - 2x\sqrt{x} + x = 0$ geeft $x = 0$ of $x - 2\sqrt{x} + 1 = 0$ 1
- $x - 2\sqrt{x} + 1 = 0$ geeft $2\sqrt{x} = x + 1$ en dan volgt $x^2 - 2x + 1 = 0$ 1
- Dit geeft $x = 1$ 1
- De enige twee oplossingen zijn $x = 0$ en $x = 1$ 1

10 maximumscore 4

- De gevraagde oppervlakte is gelijk aan $\int_0^1 (x^2 - 2x\sqrt{x} + x) dx$ 1
- Een primitieve van $x^2 - 2x\sqrt{x} + x$ is $\frac{1}{3}x^3 - \frac{4}{5}x^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{2}x^2$ 2
- De oppervlakte is gelijk aan $\frac{1}{30}$ 1

Opmerking

Voor het tweede antwoordelement mogen uitsluitend 0 of 2 scorepunten worden toegekend.

Vraag	Antwoord	Scores
-------	----------	--------

11 maximumscore 7

- $f'(x) = 2x - 3\sqrt{x} + 1$ 1
- $f'(0) = 1$ 1
- Uit $2x - 3\sqrt{x} + 1 = 1$ volgt $2\sqrt{x}(\sqrt{x} - \frac{3}{2}) = 0$ (of $2x = 3\sqrt{x}$) 1
- Dit geeft ($x = 0$ of) ($\sqrt{x} = \frac{3}{2}$ dus) $x = \frac{9}{4}$ 1
- $f(\frac{9}{4}) = \frac{9}{16}$ 1
- De raaklijn bij $x = \frac{9}{4}$ heeft vergelijking $y = (x - \frac{9}{4}) + \frac{9}{16}$ 1
- (Dit is gelijk aan $y = x - \frac{27}{16}$, dus) $a = \frac{27}{16}$ 1

of

- $f'(x) = 2x - 3\sqrt{x} + 1$ 1
- $f'(0) = 1$ (dus lijn k heeft vergelijking $y = x$) 1
- Uit $2x - 3\sqrt{x} + 1 = 1$ volgt $2\sqrt{x}(\sqrt{x} - \frac{3}{2}) = 0$ (of $2x = 3\sqrt{x}$) 1
- Dit geeft ($x = 0$ of) ($\sqrt{x} = \frac{3}{2}$ dus) $x = \frac{9}{4}$ 1
- $f(\frac{9}{4}) = \frac{9}{16}$ 1
- Lijn k verschuiven over de vector $\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}$ geeft vergelijking $y = x - a$ 1
- $\frac{9}{16} = \frac{9}{4} - a$ geeft $a = \frac{27}{16}$ 1

Vraag	Antwoord	Scores
-------	----------	--------

Vulkaan

12 maximumscore 3

- $t = \frac{x}{210 \cos(\alpha)}$ 1

- $y = 2000 + 210 \sin(\alpha) \cdot \frac{x}{210 \cos(\alpha)} - 4,9 \cdot \left(\frac{x}{210 \cos(\alpha)} \right)^2$ 1

- $\frac{4,9}{210^2} = \frac{1}{9000}$, dus $y = 2000 + \tan(\alpha) \cdot x - \frac{1}{9000 \cos^2(\alpha)} \cdot x^2$ 1

of

- $x = 210 \cos(\alpha) \cdot t$ en $y = 2000 + 210 \sin(\alpha) \cdot t - 4,9t^2$ invullen in formule 2 geeft

$$210 \sin(\alpha) \cdot t - 4,9t^2 = \tan(\alpha) \cdot 210 \cos(\alpha) \cdot t - \frac{1}{9000 \cos^2(\alpha)} \cdot (210 \cos(\alpha) \cdot t)^2$$
 1

- Dit geeft $210 \sin(\alpha) \cdot t - 4,9t^2 = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} \cdot 210 \cos(\alpha) \cdot t - \frac{44\,100 \cos^2(\alpha) \cdot t^2}{9000 \cos^2(\alpha)}$ 1

- Dit geeft $210 \sin(\alpha) \cdot t - 4,9t^2 = 210 \sin(\alpha) \cdot t - 4,9t^2$ dus deze gelijkheid geldt (voor elke waarde van α en t) (en hiermee is formule 2 bewezen) 1

13 maximumscore 3

- De vergelijking $0 = 2000 + \tan(1) \cdot x - \frac{1}{9000 \cos^2(1)} \cdot x^2$ moet worden opgelost 1

- Beschrijven hoe deze vergelijking kan worden opgelost 1

- De gevraagde afstand is 5100 (meter) (het antwoord -1000 voldoet niet) 1

Opmerking:

Als een leerling de afstand tot de top van de vulkaan berekent, en daarvoor gebruik maakt van $x=5100$ (of nauwkeuriger), dan mogen alle punten al worden toegekend mits het eindantwoord op honderden meters is afgerond.

Vraag	Antwoord	Scores
-------	----------	--------

14 maximumscore 4

- Voor een gemeenschappelijk punt moet gelden
$$-\frac{1}{9000} \cdot x^2 + 4250 = -\frac{1 + \tan^2(\alpha)}{9000} \cdot x^2 + \tan(\alpha) \cdot x + 2000$$
 1

- Herleiden tot
$$\frac{\tan^2(\alpha)}{9000} \cdot x^2 - \tan(\alpha) \cdot x + 2250 = 0$$
 1

- $$D = (-\tan(\alpha))^2 - 4 \cdot \frac{\tan^2(\alpha)}{9000} \cdot 2250$$
 1

- $D = \tan^2(\alpha) - \tan^2(\alpha) = 0$ (voor elke α) (dus heeft elke parabool precies één punt gemeenschappelijk met de gestippelde kromme) 1

of

- Er geldt voor formule 3: $\frac{dy}{dx} = \frac{-1 - \tan^2(\alpha)}{4500} \cdot x + \tan(\alpha)$ en voor de formule van de gestippelde kromme: $\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{4500} \cdot x$ 1

- Gelijkstellen geeft $x = \frac{4500}{\tan(\alpha)}$ 1

- $x = \frac{4500}{\tan(\alpha)}$ invullen in formule 3 geeft:
$$y = \frac{-1 - \tan^2(\alpha)}{9000} \cdot \left(\frac{4500}{\tan(\alpha)}\right)^2 + \tan(\alpha) \cdot \frac{4500}{\tan(\alpha)} + 2000 = -\frac{4500}{2 \tan^2(\alpha)} + 4250$$
 1

- $x = \frac{4500}{\tan(\alpha)}$ invullen in formule 4 geeft:
$$y = -\frac{1}{9000} \cdot \left(\frac{4500}{\tan(\alpha)}\right)^2 + 4250 = -\frac{4500}{2 \tan^2(\alpha)} + 4250$$
 (en dus is er voor iedere waarde van α een punt waarin de functiewaarden en de afgeleiden aan elkaar gelijk zijn, dus raken de banen in dat punt aan de gestippelde kromme) 1

Opmerking

Als een kandidaat alleen opmerkt dat moet gelden

$$-\frac{1 + \tan^2(\alpha)}{9000} \cdot x^2 + \tan(\alpha) \cdot x + 2000 = -\frac{1}{9000} \cdot x^2 + 4250 \text{ en}$$

$$\frac{d}{dx} \left(-\frac{1 + \tan^2(\alpha)}{9000} \cdot x^2 + \tan(\alpha) \cdot x + 2000 \right) = \frac{d}{dx} \left(-\frac{1}{9000} \cdot x^2 + 4250 \right), \text{ voor deze}$$

vraag 1 scorepunt toekennen.

Vraag	Antwoord	Scores
-------	----------	--------

Scheve asymptoot

15 maximumscore 8

- (Als x onbegrensd toeneemt, gaat $\frac{2}{x}$ naar de limietwaarde 0, dus) een vergelijking van de scheve asymptoot is $y = x$ 1
- $f'(x) = 1 - \frac{2}{x^2}$ 1
- Een vergelijking van de raaklijn in P is $y = (1 - \frac{2}{p^2})x + b$ 1
- Dan geldt (omdat $P(p, p + \frac{2}{p})$) $p + \frac{2}{p} = (1 - \frac{2}{p^2})p + b$ 1
- Dan volgt $b = \frac{4}{p}$ (dus $Q(0, \frac{4}{p})$) 1
- Voor het snijpunt R geldt $x_R = (1 - \frac{2}{p^2})x_R + \frac{4}{p}$ 1
- Hieruit volgt $x_R = 2p$ (dus $R(2p, 2p)$) 1
- $\frac{x_Q + x_R}{2} = \frac{0 + 2p}{2} = p = x_P$ (of $\frac{y_Q + y_R}{2} = \frac{\frac{4}{p} + 2p}{2} = \frac{2}{p} + p = y_P$), dus punt P is het midden van lijnstuk QR 1

of

Vraag	Antwoord	Scores
	<ul style="list-style-type: none"> (Als x onbegrensd toeneemt, gaat $\frac{2}{x}$ naar de limietwaarde 0, dus) een vergelijking van de scheve asymptoot is $y = x$ 	1
	<ul style="list-style-type: none"> $f'(x) = 1 - \frac{2}{x^2}$ 	1
	<ul style="list-style-type: none"> Een vergelijking van de raaklijn in P is $y - p - \frac{2}{p} = (1 - \frac{2}{p^2})(x - p)$ (of een gelijkwaardige uitdrukking) (dus $Q(0, \frac{4}{p})$) 	2
	<ul style="list-style-type: none"> Voor het snijpunt met de scheve asymptoot geldt $x = (1 - \frac{2}{p^2})(x - p) + p + \frac{2}{p}$ 	1
	<ul style="list-style-type: none"> Dan volgt $x = x - p - \frac{2}{p^2}x + \frac{2}{p} + p + \frac{2}{p} = x - \frac{2}{p^2}x + \frac{4}{p}$ 	1
	<ul style="list-style-type: none"> Hieruit volgt $x_R = 2p$ (dus $R(2p, 2p)$) 	1
	<ul style="list-style-type: none"> $\frac{x_Q + x_R}{2} = \frac{0 + 2p}{2} = p = x_P$ (of $\frac{y_Q + y_R}{2} = \frac{\frac{4}{p} + 2p}{2} = \frac{2}{p} + p = y_P$), dus punt P is het midden van lijnstuk QR 	1
	of	
	<ul style="list-style-type: none"> (Als x onbegrensd toeneemt, gaat $\frac{2}{x}$ naar de limietwaarde 0, dus) een vergelijking van de scheve asymptoot is $y = x$ 	1
	<ul style="list-style-type: none"> $f'(x) = 1 - \frac{2}{x^2}$ 	1
	<ul style="list-style-type: none"> Een vergelijking van de raaklijn in P is $y - p - \frac{2}{p} = (1 - \frac{2}{p^2})(x - p)$ (of een gelijkwaardige uitdrukking) 	2
	<ul style="list-style-type: none"> Uit $x_Q = 0$ en $x_P = p$ volgt dat moet gelden dat $x_R = 2p$ 	1
	<ul style="list-style-type: none"> $x_Q = 0$ geeft $y_Q - p - \frac{2}{p} = -p + \frac{2}{p}$ ofwel $y_Q = \frac{4}{p}$ 	1
	<ul style="list-style-type: none"> Uit $y_Q = \frac{4}{p}$ en $y_P = p + \frac{2}{p}$ volgt dat moet gelden dat $y_R = 2p$ 	1
	<ul style="list-style-type: none"> $x_R = y_R$, dus punt R ligt op de scheve asymptoot (en daarmee is P het midden van QR) 	1

Opmerking

Voor het derde antwoordelement van het tweede en derde antwoordalternatief mogen uitsluitend 0 of 2 scorepunten worden toegekend.

Vraag	Antwoord	Scores
-------	----------	--------

Vlieger

16 maximumscore 5

- $M(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}a)$ is het midden van lijnstuk AB 1
- $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ -a \end{pmatrix}$ is een normaalvector van de middelloodlijn, dus een vergelijking van de middelloodlijn is $x - ay = c$, voor zekere waarde van c 1
- Invullen van $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}a)$ geeft $c = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}a^2$, dus een vergelijking is $x - ay = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}a^2$ 1
- Invullen van $D(-1, 0)$ geeft de vergelijking $-1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}a^2$ 1
- Dit geeft (omdat $a > 0$) de oplossing $a = \sqrt{3}$ 1

of

- $M(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}a)$ is het midden van lijnstuk AB 1
- $rc_{AB} = -a$ dus de richtingscoëfficiënt van de middelloodlijn van AB is $\frac{1}{a}$ 1
- Een vergelijking van de middelloodlijn is: $y = \frac{1}{a}x + \frac{1}{2}a - \frac{1}{2a}$ 1
- De lijn moet door $D(-1, 0)$ gaan, dus er moet gelden $0 = -\frac{1}{a} + \frac{1}{2}a - \frac{1}{2a}$ 1
- De oplossing is (omdat $a > 0$) $a = \sqrt{3}$ 1

of

- $M(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}a)$ is het midden van lijnstuk AB 1
- $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ -a \end{pmatrix}$ is een normaalvector van de middelloodlijn, dus $\begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix}$ is een richtingsvector 1
- $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}a \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix}$ is een vectorvoorstelling van de middelloodlijn 1
- Invullen van $D(-1, 0)$ geeft het stelsel $\begin{cases} -1 = \frac{1}{2} + at \\ 0 = \frac{1}{2}a + t \end{cases}$ 1
- Een berekening waaruit volgt (omdat $a > 0$) dat $a = \sqrt{3}$ 1

of

Vraag	Antwoord	Scores
-------	----------	--------

- $M(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}a)$ is het midden van lijnstuk AB 1
- $MB^2 = (\frac{1}{2}-1)^2 + (\frac{1}{2}a)^2 = \frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}$ en $DM^2 = (\frac{1}{2}-(-1))^2 + (\frac{1}{2}a)^2 = \frac{1}{4}a^2 + \frac{9}{4}$ 2
- Pythagoras in rechthoekige driehoek BDM geeft $DM^2 + MB^2 = DB^2$,
ofwel $\frac{1}{4}a^2 + \frac{9}{4} + \frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4} = 4$ 1
- Hieruit volgt (omdat $a > 0$) $a = \sqrt{3}$ 1

of

- Als de middelloodlijn van AB door D gaat, dan is driehoek DMB gelijkvormig met driehoek DMA , waarbij M het midden is van lijnstuk AB 2
- Dus $DA = DB = 2$ 1
- Pythagoras in driehoek OAD geeft $a^2 + 1^2 = 2^2$ 1
- Dus (omdat $a > 0$) $a = \sqrt{3}$ 1

of

- $M(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}a)$ is het midden van lijnstuk AB 1
- $\begin{pmatrix} 1 \\ -a \end{pmatrix}$ is een richtingsvector van AB 1
- $\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2}a \end{pmatrix}$ is een richtingsvector van DM 1
- $\begin{pmatrix} 1 \\ -a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2}a \end{pmatrix} = 1 - \frac{1}{2}a^2 = 0$ 1
- Een berekening waaruit volgt (omdat $a > 0$) dat $a = \sqrt{3}$ 1

of

- $M(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}a)$ is het midden van lijnstuk AB 1
- Hoek BMD is 90° dus M ligt op de cirkel met middellijn DB 1
- Een vergelijking van de cirkel met middellijn DB is $x^2 + y^2 = 1$ 1
- $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}a)$ invullen geeft $(\frac{1}{2})^2 + (\frac{1}{2}a)^2 = 1$ 1
- Een berekening waaruit volgt (omdat $a > 0$) dat $a = \sqrt{3}$ 1

of

Vraag	Antwoord	Scores
-------	----------	--------

- Voor de punten $P(x, y)$ op de middelloodlijn van AB geldt $d(P, A) = d(P, B)$ 1
- $x^2 + (y - a)^2 = (x - 1)^2 + y^2$ 1
- De middelloodlijn gaat door D , dus $(-1, 0)$ is een oplossing van deze vergelijking 1
- Substitutie geeft $1 + a^2 = 4$ (of een gelijkwaardige uitdrukking) 1
- Een berekening waaruit volgt (omdat $a > 0$) dat $a = \sqrt{3}$ 1

Opmerking

Voor het tweede antwoordelement van het vierde antwoordalternatief en het eerste antwoordelement van het vijfde antwoordalternatief mogen 0, 1 of 2 scorepunten worden toegekend.

17 maximumscore 4

- Het totaal van de puntmassa's heeft gewicht $4 + a$ 1
- Voor het zwaartepunt Z van de vier puntmassa's geldt
$$\vec{OZ} = \frac{a}{4+a} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{4+a} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{4+a} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{2}{4+a} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix}$$
 1
- De coördinaten van het zwaartepunt Z zijn dus $\left(0, \frac{a}{4+a}\right)$ (of: de tweede coördinaat van Z is $\frac{a}{4+a}$) 1
- $\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{a}{4+a} = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{4}{a} + 1} = 1$ (dus de y -coördinaat van P is 1) 1

of

- Het totaal van de puntmassa's heeft gewicht $4 + a$ 1
- (Vanwege symmetrie ligt Z op de y -as, en) voor het zwaartepunt Z van de puntmassa's geldt $y_Z = \frac{1}{4+a}(-1 \cdot a + a \cdot 2)$ 1
- Dus $y_Z = \frac{a}{4+a}$ 1
- $\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{a}{4+a} = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{4}{a} + 1} = 1$ (dus de y -coördinaat van P is 1) 1