## Formules

### Goniometrie

$$\sin(t+u)=\sin(t)\cos(u)+\cos(t)\sin(u)$$
$$\sin(t-u)=\sin(t)\cos(u)-\cos(t)\sin(u)$$
$$\cos(t+u)=\cos(t)\cos(u)-\sin(t)\sin(u)$$
$$\cos(t-u)=\cos(t)\cos(u)+\sin(t)\sin(u)$$

$$\sin(2t)=2\sin(t)\cos(t)$$
$$\cos(2t)=\cos^2(t)-\sin^2(t)=2\cos^2(t)-1=1-2\sin^2(t)$$

## Onbekende zijde

Gegeven is driehoek $ABC$ met $AB = 4$ en $BC = 12$.
Punt $M$ is het midden van lijnstuk $BC$. Verder geldt: $AM = 5$.

4p **1** Bereken algebraïsch de lengte van $AC$. Geef je eindantwoord in één decimaal.

## Spookje

Op het domein $\left[-\frac{1}{2}\pi, 1\frac{1}{2}\pi\right]$ worden de functies $f$ en $g$ gegeven door:

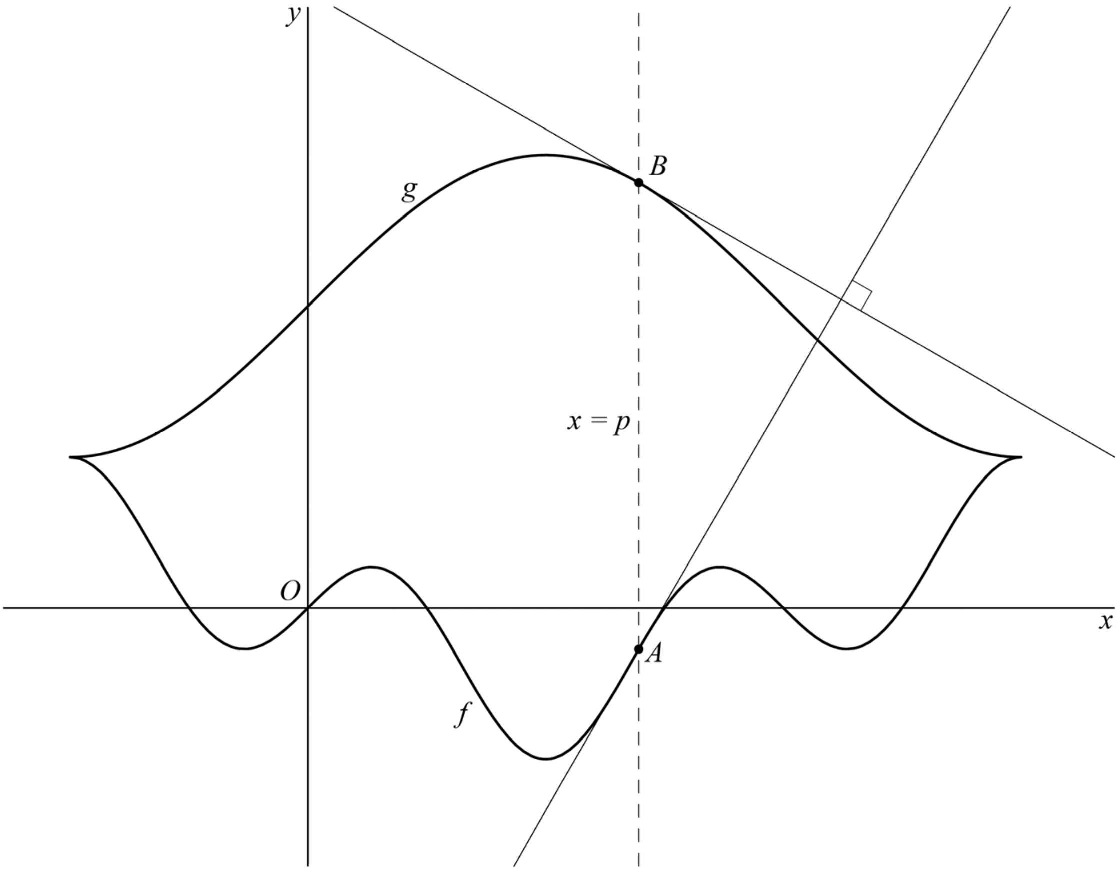
$$f(x) = \sin(x)\cos(2x)$$
$$g(x) = 2 + \sin(x)$$

Er geldt: $f'(x) = 6\cos^3(x) - 5\cos(x)$.

6p **2** Bewijs dat inderdaad geldt: $f'(x) = 6\cos^3(x) - 5\cos(x)$.

In de figuur zijn de grafieken van $f$ en $g$ weergegeven. De verticale lijn met vergelijking $x = p$ snijdt de grafiek van $f$ in het punt $A$ en de grafiek van $g$ in het punt $B$. We bekijken de raaklijn aan de grafiek van $f$ in $A$ en de raaklijn aan de grafiek van $g$ in $B$.

**figuur**




In de figuur is een waarde van $p$ gekozen waarvoor de twee raaklijnen elkaar loodrecht snijden. Er zijn meerdere waarden van $p$ waarvoor dit het geval is.

6p **3** Bereken exact het **aantal** waarden van $p$ waarvoor de twee raaklijnen elkaar loodrecht snijden.

Het functievoorschrift van $f$ kan worden herleid tot:

$$f(x) = \tfrac{1}{2}(\sin(3x) - \sin(x))$$

Dit kan bijvoorbeeld worden bewezen door de vorm $\sin(t+u) - \sin(t-u)$ voor een geschikte keuze van $t$ en $u$ te herleiden.

3p **4** Bewijs dat $\tfrac{1}{2}(\sin(3x) - \sin(x)) = \sin(x)\cos(2x)$.

De grafieken van $f$ en $g$ hebben twee gemeenschappelijke punten, namelijk $\left(-\tfrac{1}{2}\pi, 1\right)$ en $\left(1\tfrac{1}{2}\pi, 1\right)$.

$V$ is het gebied dat wordt ingesloten door de grafieken van $f$ en $g$.

4p **5** Bereken exact de oppervlakte van $V$.

## Hoogwater

De hoeveelheid water die door een rivier wordt afgevoerd, varieert van moment tot moment. De hoeveelheid water die de rivier maximaal kan afvoeren, noemen we de **capaciteit** van de rivier. Als de capaciteit te laag is, kan de rivier overstromen. Om te kunnen inschatten hoe vaak een overstroming plaatsvindt, gebruiken we het volgende model:

$$C = a - b \cdot \ln\left(\ln\left(\frac{T}{T-1}\right)\right) \qquad \text{met } T > 1 \qquad \text{(formule 1)}$$

Hierin is $C$ de capaciteit in $m^3$/s en $T$ de zogeheten **herhalingstijd**.
De herhalingstijd is de periode in jaren waarin de waarde van $C$ gemiddeld één keer wordt overschreden. Als bijvoorbeeld $T = 40$, dan zal de rivier gemiddeld één keer in de 40 jaar overstromen.
De waarden van $a$ en $b$ worden berekend met behulp van gegevens uit het verleden. Er geldt altijd: $a > 0$ en $b > 0$.

Voor de Rijn geldt: $a = 5734$ en $b = 1648$. De capaciteit is 12 000 $m^3$/s.

5p **6** Bereken algebraïsch de herhalingstijd in jaren. Geef je eindantwoord als geheel getal.

Uit formule 1 is af te leiden dat voor de afgeleide van $C$ geldt:

$$\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}T} = \frac{b}{T \cdot (T-1) \cdot \ln\left(\frac{T}{T-1}\right)} \qquad \text{met } T > 1 \qquad \text{(formule 2)}$$

5p **7** Bewijs dit.

Voor elke rivier geldt natuurlijk: hoe groter de herhalingstijd, des te groter is de capaciteit. De grafiek van $C$ zou dus voor elke waarde van $a$ en $b$ (met $a > 0$ en $b > 0$) stijgend moeten zijn.

5p **8** Bewijs met behulp van formule 2 dat de grafiek van $C$ inderdaad stijgend is voor elke waarde van $a$ en $b$ (met $a > 0$ en $b > 0$).

Voor de Maas geldt:

- Bij een capaciteit van 1700 $m^3$/s is de herhalingstijd gelijk aan 4 jaar.
- Bij een capaciteit van 2100 $m^3$/s is de herhalingstijd gelijk aan 10 jaar.

Voor toekomstig beleid wil het ministerie van Infrastructuur en Waterstaat voor de Maas weten welke capaciteit hoort bij een herhalingstijd van 100 jaar.

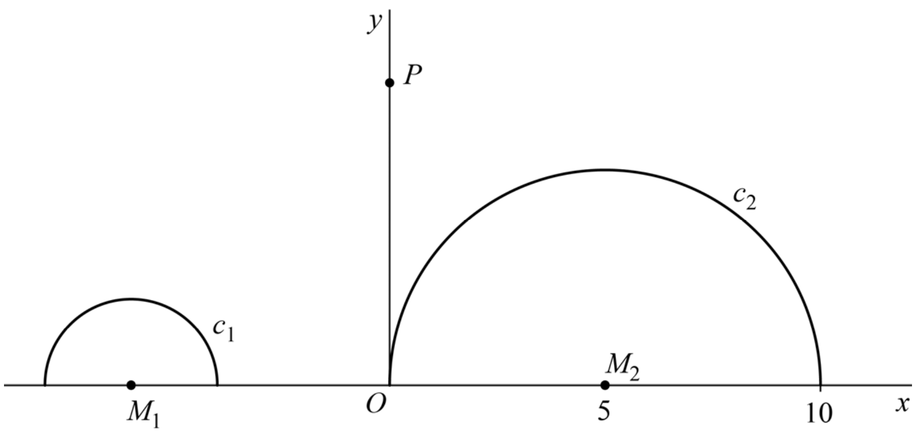
4p **9** Bereken deze waarde van $C$ in $m^3$/s met behulp van formule 1. Geef je eindantwoord als geheel getal.

## Twee halve cirkels

Gegeven zijn de twee halve cirkels $c_1$ en $c_2$.
Voor $c_1$ geldt: $x^2 + y^2 + 12x = -32$, het middelpunt is $M_1$ en $y \geq 0$.
Voor $c_2$ geldt: het middelpunt is $M_2(5, 0)$, de straal is 5 en $y \geq 0$.

Op de positieve $y$-as ligt een punt $P$. Zie de figuur.

**figuur**




$P$ wordt zo op de $y$-as gekozen dat de afstand van $P$ tot $c_1$ twee keer zo groot is als de afstand van $P$ tot $c_2$.

7p **10** Bereken de $y$-coördinaat van $P$ voor deze situatie. Geef je eindantwoord in twee decimalen.

## Twee bewegende punten

Voor $t \geq 0$ beweegt het punt $P_1$ volgens de bewegingsvergelijkingen:

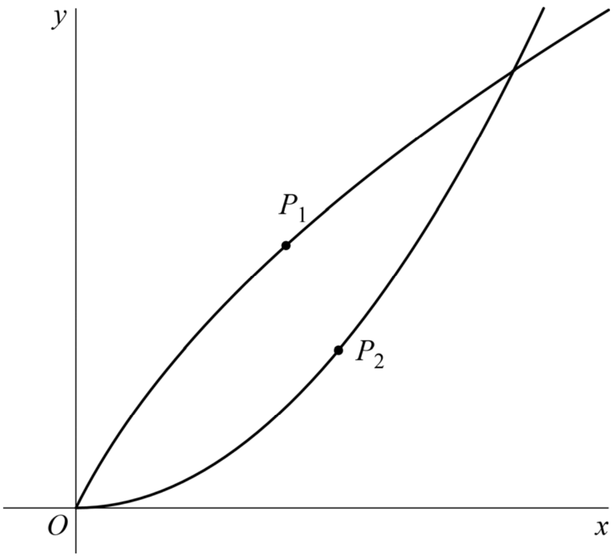
$$\begin{cases} x(t) = t^2 + 2t \\ y(t) = 4t \end{cases}$$

Tegelijkertijd beweegt het punt $P_2$ volgens de bewegingsvergelijkingen:

$$\begin{cases} x(t) = 4t \\ y(t) = 2t^2 \end{cases}$$

In figuur 1 zijn beide banen getekend met daarop de punten $P_1$ en $P_2$ op een tijdstip $t$.

**figuur 1**

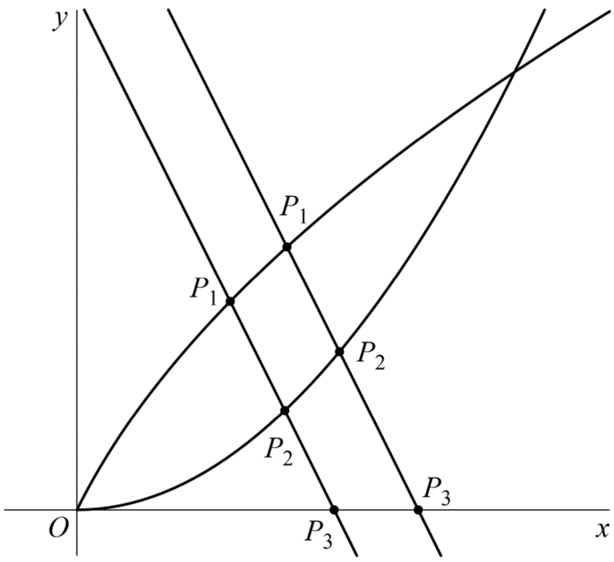



Voor de snelheid $v_2$ van $P_2$ geldt: $v_2(t) = 4\sqrt{t^2 + 1}$.
Er is één tijdstip $t$ waarop de punten $P_1$ en $P_2$ gelijke snelheid hebben.

5p **11** Bereken exact dit tijdstip.

In figuur 2 zijn nogmaals beide banen getekend.
Op twee tijdstippen, namelijk $t = 0$ en $t = 2$, vallen $P_1$ en $P_2$ samen. Op alle andere tijdstippen kun je de lijn $l$ door $P_1$ en $P_2$ tekenen. In figuur 2 is dit voor twee tijdstippen gedaan.

**figuur 2**




De richtingscoëfficiënt van $l$ is gelijk aan $-2$ voor elke waarde van $t$ (met $t \neq 0$ en $t \neq 2$).

3p **12** Bewijs dit.

Voor elke waarde van $t$ (met $t \neq 0$ en $t \neq 2$) is $P_3$ het snijpunt van $l$ met de $x$-as. Zie figuur 2, waarin $P_3$ is aangegeven voor twee verschillende tijdstippen.

4p **13** Bereken exact op welk tijdstip de $x$-coördinaat van $P_3$ gelijk is aan 3.

## Een derdegraadsfunctie

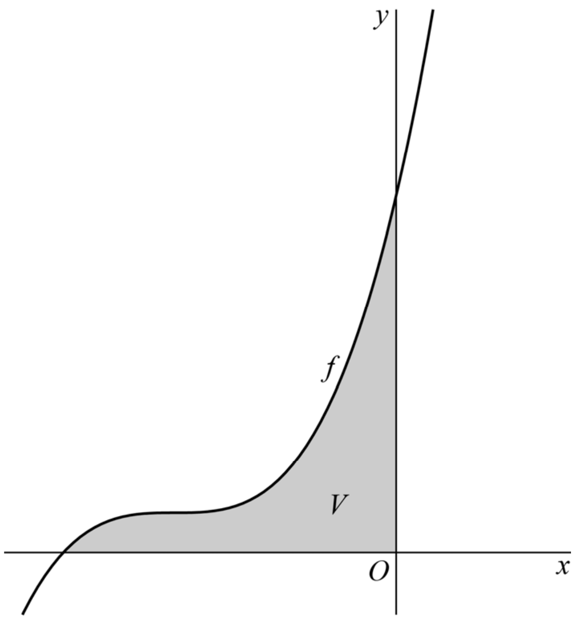
De functie $f$ wordt gegeven door $f(x) = x^3 + 6x^2 + 12x + 9$.

Deze functie heeft een inverse functie $f^{\text{inv}}$. Er geldt: $f^{\text{inv}}(x) = -2 + \sqrt[3]{x-1}$.

3p **14** Bewijs dat inderdaad geldt: $f^{\text{inv}}(x) = -2 + \sqrt[3]{x-1}$.

$V$ is het vlakdeel dat wordt ingesloten door de grafiek van $f$, de $x$-as en de $y$-as.
Zie de figuur. Deze figuur is niet op schaal.

**figuur**




Vlakdeel $V$ wordt gewenteld om de $y$-as. Zo ontstaat een omwentelingslichaam.

3p **15** Bereken de inhoud van dit omwentelingslichaam. Geef je eindantwoord in één decimaal.

Op de grafiek van $f$ ligt een punt $P$ waarin de raaklijn aan de grafiek van $f$ horizontaal is.
Op de grafiek van $f^{\text{inv}}$ ligt een punt $Q$ waarin de raaklijn aan de grafiek van $f^{\text{inv}}$ verticaal is.
De lijn door $P$ en $Q$ snijdt de $y$-as in punt $S$.

6p **16** Bereken exact de $y$-coördinaat van $S$.