Vraag	Antwoord	Scores

Onbekende zijde

1 maximumscore 4

- Cosinusregel in driehoek *ABM* geeft
  $5^2 = 4^2 + 6^2 - 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cos(\angle ABM)$ 1
- Hieruit volgt $\cos(\angle ABM) = \frac{9}{16}$ (dus $\cos(\angle ABC) = \frac{9}{16}$) (dus
  $\angle ABC = 55,77...(°)$) 1
- Cosinusregel in driehoek *ABC* geeft
  $AC^2 = 4^2 + 12^2 - 2 \cdot 4 \cdot 12 \cdot \frac{9}{16}$ 1
- Dit geeft $AC^2 = 106$, dus $AC \approx 10,3$ 1

of

- Cosinusregel in driehoek *ABM* geeft
  $4^2 = 5^2 + 6^2 - 2 \cdot 5 \cdot 6 \cdot \cos(\angle AMB)$ 1
- Hieruit volgt $\cos(\angle AMB) = \frac{3}{4}$ (dus $\angle AMB = 41,40...(°)$) 1
- $\cos(\angle AMC) = (-\cos(\angle AMB) =) -\frac{3}{4}$
  (of $\angle AMC = (180 - \angle AMB =) 138,59...(°)$, dus $\cos(\angle AMC) = -\frac{3}{4}$) 1
- Cosinusregel in driehoek *AMC* geeft
  $AC^2 = 5^2 + 6^2 - 2 \cdot 5 \cdot 6 \cdot -\frac{3}{4} = 106$, dus $AC \approx 10,3$ 1

of

- Er geldt $t^2 + u^2 = 4^2$ (met *P* de loodrechte projectie van *A* op *MB*,
  $t = AP$ en $u = BP$) 1
- Ook geldt $t^2 + (6-u)^2 = 5^2$ 1
- Algebraïsch oplossen van dit stelsel geeft $t = 3,30...$, $u = 2,25$
  (de oplossing $t = -3,30...$, $u = 2,25$ voldoet niet) 1
- Omdat $AC^2 = t^2 + (12-u)^2$, volgt $AC^2 = 106$, dus $AC \approx 10,3$ 1

Vraag	Antwoord	Scores

Spookje

2 maximumscore 6

- $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cos(2x) = -2\sin(2x)$ 1
- $f'(x) = \cos(x)\cos(2x) - 2\sin(x)\sin(2x)$ 1
- $\cos(x)\cos(2x) = \cos(x)(2\cos^2(x) - 1) = 2\cos^3(x) - \cos(x)$ 1
- $2\sin(x)\sin(2x) = 2\sin(x) \cdot 2\sin(x)\cos(x) = 4\sin^2(x)\cos(x)$ 1
- $4\sin^2(x)\cos(x) = 4\cos(x)\left(1 - \cos^2(x)\right)$ 1
- $2\cos^3(x) - \cos(x) - 4\cos(x)\left(1 - \cos^2(x)\right)$ herleiden tot $6\cos^3(x) - 5\cos(x)$ 1

3 maximumscore 6

- Voor p moet gelden $f'(p) \cdot g'(p) = -1$ 1
- $\left(6\cos^3(p) - 5\cos(p)\right) \cdot \cos(p) = -1$ geeft $6\cos^4(p) - 5\cos^2(p) + 1 = 0$ 1
- De vergelijking $6q^2 - 5q + 1 = 0$ (met $q = \cos^2(p)$) moet worden opgelost 1
- Dit geeft $q = \frac{1}{3}$ of $q = \frac{1}{2}$ 1
- Hieruit volgt $\cos(p) = -\sqrt{\frac{1}{3}}$ of $\cos(p) = \sqrt{\frac{1}{3}}$ of $\cos(p) = -\sqrt{\frac{1}{2}}$ of $\cos(p) = \sqrt{\frac{1}{2}}$ 1
- Elk van deze vergelijkingen heeft 2 oplossingen (die allemaal verschillen), dus het gevraagde aantal is 8 1

4 maximumscore 3

- De keuze $t = 2x$ en $u = x$ 1
- $\sin(2x + x) - \sin(2x - x) =$ $\sin(2x)\cos(x) + \cos(2x)\sin(x) - \sin(2x)\cos(x) + \cos(2x)\sin(x)$ 1
- Dit is gelijk aan $2\cos(2x)\sin(x)$, dus $\frac{1}{2}(\sin(3x) - \sin(x)) = \sin(x)\cos(2x)$ 1

of

- $\sin(3x) - \sin(x) = \sin(2x + x) - \sin(x) =$ $\sin(2x)\cos(x) + \cos(2x)\sin(x) - \sin(x)$ 1
- Dit is gelijk aan $2\sin(x)\cos^2(x) + \cos(2x)\sin(x) - \sin(x) =$ $\sin(x)\left(2\cos^2(x) + \cos(2x) - 1\right) = \sin(x)(\cos(2x) + \cos(2x))$ 1
- Dit is gelijk aan $\sin(x) \cdot 2\cos(2x)$, dus $\frac{1}{2}(\sin(3x) - \sin(x)) = \sin(x)\cos(2x)$ 1

Vraag	Antwoord	Scores

5 **maximumscore 4**

- De oppervlakte van V is gelijk aan $\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{1\frac{1}{2}\pi} \left(2+\sin(x)-\frac{1}{2}(\sin(3x)-\sin(x))\right) \mathrm{d}x$ 1
- Een primitieve van $\frac{1}{2}\sin(3x)$ is $-\frac{1}{6}\cos(3x)$ 1
- Een primitieve van $2+\sin(x)+\frac{1}{2}\sin(x)$ is $2x-\cos(x)-\frac{1}{2}\cos(x)$ 1
- Invullen van de grenzen geeft: de oppervlakte is 4π 1

of

- De oppervlakte van V is gelijk aan $\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{1\frac{1}{2}\pi} \left(2+\sin(x)-\frac{1}{2}(\sin(3x)-\sin(x))\right) \mathrm{d}x$ 1
- Een primitieve van $2+\sin(x)$ is $2x-\cos(x)$ 1
- Een primitieve van $\frac{1}{2}\left(\sin(3x)-\sin(x)\right)$ is $-\frac{1}{6}\cos(3x)+\frac{1}{2}\cos(x)$ 1
- Invullen van de grenzen geeft: de oppervlakte is 4π 1

Vraag	Antwoord	Scores

Hoogwater

6 maximumscore 5

- De vergelijking $12\,000 = 5734 - 1648\ln\left(\ln\left(\frac{T}{T-1}\right)\right)$ moet worden opgelost — 1
- $\ln\left(\ln\left(\frac{T}{T-1}\right)\right) = \frac{12\,000 - 5734}{-1648}$ $(= -3{,}802...)$ — 1
- $\ln\left(\frac{T}{T-1}\right) = \mathrm{e}^{-3{,}802...}$ $(= 0{,}022...)$ — 1
- $\frac{T}{T-1} = \mathrm{e}^{0{,}022...} = 1{,}022...$, dus $T = 1{,}022...\cdot(T-1)$ — 1
- Dit geeft $T = \frac{1{,}022...}{(1{,}022... - 1)} = 45{,}3...$, dus de gevraagde herhalingstijd is 45 (of 46) (jaar) — 1

7 maximumscore 5

- $\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}T} = \frac{-b}{\ln\left(\frac{T}{T-1}\right)} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}T}\ln\left(\frac{T}{T-1}\right)$ (of een gelijkwaardige uitdrukking) — 2
- $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}T}\ln\left(\frac{T}{T-1}\right) = \frac{1}{\frac{T}{T-1}} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}T}\frac{T}{T-1}$ — 1
- $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}T}\frac{T}{T-1} = \frac{1\cdot(T-1) - 1\cdot T}{(T-1)^2} = \frac{-1}{(T-1)^2}$ — 1
- $\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}T} = \frac{-b}{\ln\left(\frac{T}{T-1}\right)} \cdot \frac{1}{\frac{T}{T-1}} \cdot \frac{-1}{(T-1)^2}$ geeft $\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}T} = \frac{b}{T\cdot(T-1)\cdot\ln\left(\frac{T}{T-1}\right)}$ — 1

of

- $C = a - b\ln(\ln(T) - \ln(T-1))$ — 1
- $\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}T} = \frac{-b}{\ln(T) - \ln(T-1)} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}T}(\ln(T) - \ln(T-1))$ — 1
- $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}T}(\ln(T) - \ln(T-1)) = \frac{1}{T} - \frac{1}{T-1}$ — 1
- $\frac{1}{T} - \frac{1}{T-1} = \frac{T-1}{T(T-1)} - \frac{T}{T(T-1)} = \frac{-1}{T(T-1)}$ — 1
- $\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}T} = \frac{-b}{\ln(T) - \ln(T-1)} \cdot \frac{-1}{T(T-1)} = \frac{b}{T\cdot(T-1)\cdot\ln\left(\frac{T}{T-1}\right)}$ — 1

Opmerking
In het eerste antwoordalternatief mogen voor het eerste antwoordelement uitsluitend 0 of 2 scorepunten worden toegekend.

Vraag	Antwoord	Scores

8 **maximumscore 5**

- Er moet gelden: $\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}T} > 0$ 1
- (Omdat $T > 1$ geldt) $T > 0$ en $T - 1 > 0$ 1
- Omdat (ook) $T > T - 1$, geldt $\frac{T}{T-1} > 1$ 1
- (Omdat $y = \ln(x)$ stijgend is en $\ln(1) = 0$ volgt hieruit dat) $\ln\left(\frac{T}{T-1}\right) > 0$ 1
- Zowel $b > 0$ als $T \cdot (T-1) \cdot \ln\left(\frac{T}{T-1}\right) > 0$ (dus $\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}T} > 0$, dus de grafiek van C is stijgend) 1

of

- Er moet gelden: $\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}T} > 0$ 1
- (Omdat $T > 1$ geldt) $T > 0$ en $T - 1 > 0$ 1
- $\ln\left(\frac{T}{T-1}\right) = \ln(T) - \ln(T-1)$ 1
- (Omdat $y = \ln(x)$ stijgend is en $T > T - 1$, geldt) $\ln(T) > \ln(T-1)$, dus $\ln\left(\frac{T}{T-1}\right) > 0$ 1
- Zowel $b > 0$ als $T \cdot (T-1) \cdot \ln\left(\frac{T}{T-1}\right) > 0$ (dus $\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}T} > 0$, dus de grafiek van C is stijgend) 1

9 **maximumscore 4**

- Invullen geeft het stelsel vergelijkingen $\begin{cases} 1700 = a - b \cdot -1{,}24... \\ 2100 = a - b \cdot -2{,}25... \end{cases}$ 1
- Beschrijven hoe dit stelsel kan worden opgelost 1
- Hieruit volgt $b = 398{,}22...$ en $a = 1203{,}85...$ 1
- Dit geeft $C = 1203{,}85... - 398{,}22... \cdot \ln\left(\ln\left(\frac{100}{100-1}\right)\right) \approx 3036$ (of 3035) (m^3/s) 1

Vraag	Antwoord	Scores

Twee halve cirkels

10 maximumscore 7

- De vergelijking van c_1 herleiden tot $(x+6)^2+y^2=4$ — 1
- $M_1(-6, 0)$ en de straal van c_1 is 2 — 1
- $PM_1=\sqrt{6^2+OP^2}$ en $PM_2=\sqrt{5^2+OP^2}$ — 1
- $\text{d}(P, c_1)=\sqrt{6^2+OP^2}-2$ en $\text{d}(P, c_2)=\sqrt{5^2+OP^2}-5$ — 1
- De vergelijking $\sqrt{6^2+OP^2}-2=2\cdot\left(\sqrt{5^2+OP^2}-5\right)$ moet worden opgelost — 1
- Beschrijven hoe deze vergelijking kan worden opgelost — 1
- Dit geeft $OP\approx 7{,}02$ (dus de gevraagde y-coördinaat van P is 7,02) — 1

of

- Voor snijpunten van c_1 en de x-as geldt $x^2+12x=-32$, dus $x^2+12x+32=0$, dus $(x+4)(x+8)=0$, dus $x=-4$ of $x=-8$ — 1
- (Omdat c_1 een halve cirkel is met $y\geq 0$ volgt dat de diameter 4 is, dus) $M_1(-6, 0)$ en de straal van c_1 is 2 — 1
- Als $a=\text{d}(P, c_2)$, dan geldt $\text{d}(P, c_1)=2a$, dus $M_2P=5+a$ en $M_1P=2+2a$ — 1
- Er geldt $OP^2=M_1P^2-M_1O^2=(2+2a)^2-6^2$ en $OP^2=M_2P^2-M_2O^2=(5+a)^2-5^2$ — 1
- Dus $(2+2a)^2-6^2=(5+a)^2-5^2$ — 1
- Beschrijven hoe deze vergelijking kan worden opgelost — 1
- Dit geeft $a=3{,}61...$; invullen in een van de formules voor OP geeft $OP\approx 7{,}02$ (dus de gevraagde y-coördinaat van P is 7,02) — 1

Vraag	Antwoord	Scores

Twee bewegende punten

11 maximumscore 5

- Voor P_1 geldt $x'(t) = 2t + 2$ en $y'(t) = 4$ — 1
- $v_1(t) = \sqrt{(2t+2)^2 + 4^2}$ — 1
- Uit $\sqrt{(2t+2)^2 + 4^2} = 4\sqrt{t^2+1}$ volgt $(2t+2)^2 + 4^2 = 16\left(t^2+1\right)$ — 1
- Herleiden tot $12t^2 - 8t - 4 = 0$ (of $3t^2 - 2t - 1 = 0$) — 1
- Dit geeft $t = 1$ ($t = -\frac{1}{3}$ voldoet niet) — 1

12 maximumscore 3

- De richtingscoëfficiënt van de lijn door P_1 en P_2 is

  $$\frac{2t^2 - 4t}{4t - \left(t^2 + 2t\right)}$$ — 1
- Dit is gelijk aan $\dfrac{2t^2 - 4t}{2t - t^2}$ — 1
- Dit is gelijk aan $\dfrac{-2\left(-t^2 + 2t\right)}{2t - t^2}$ en dat is gelijk aan -2 — 1

of

- Een richtingsvector van de lijn door P_1 en P_2 is $\begin{pmatrix} 4t - \left(t^2 + 2t\right) \\ 2t^2 - 4t \end{pmatrix}$ — 1
- Dit is gelijk aan $\begin{pmatrix} 2t - t^2 \\ 2t^2 - 4t \end{pmatrix}$ — 1
- Dit is gelijk aan $\begin{pmatrix} 2t - t^2 \\ -2\left(2t - t^2\right) \end{pmatrix}$, dus $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ is een richtingsvector, dus de richtingscoëfficiënt is -2 — 1

Vraag	Antwoord	Scores

13 **maximumscore 4**

- Een vergelijking van l is van de vorm $y = -2x + b$ 1
- Substitutie van bijvoorbeeld $\left(4t, 2t^2\right)$ geeft $b = 2t^2 + 8t$ 1
- $(3, 0)$ moet op l liggen, dus moet gelden $0 = -6 + 2t^2 + 8t$ 1
- Exact oplossen geeft $t = \dfrac{-4 \pm \sqrt{28}}{2}$, dus het gevraagde tijdstip is $t = \dfrac{-4 + \sqrt{28}}{2}$ (of een gelijkwaardige uitdrukking)
  ($t = \dfrac{-4 - \sqrt{28}}{2}$ voldoet niet) 1

Vraag	Antwoord	Scores

Een derdegraadsfunctie

14 maximumscore 3

- (Voor een punt (x, y) op de grafiek van f ligt punt (y, x) op de grafiek van de inverse van f, dus er geldt) $x = -2 + \sqrt[3]{y-1}$ — 1
- Dus $x + 2 = \sqrt[3]{y-1}$, dus $(x+2)^3 = y - 1$, dus $y = (x+2)^3 + 1$ — 1
- Dit is gelijk aan $(x+2)^2 \cdot (x+2) + 1 = \left(x^2 + 4x + 4\right) \cdot (x+2) + 1 = x^3 + 6x^2 + 12x + 9$ ($= f(x)$, dus geldt inderdaad $f^{\text{inv}}(x) = -2 + \sqrt[3]{x-1}$) — 1

of

- (Voor een punt (x, y) op de grafiek van de inverse van f ligt punt (y, x) op de grafiek van f, dus er geldt) $x = y^3 + 6y^2 + 12y + 9$ — 1
- $(y+2)^3 = (y+2)^2(y+2) = \left(y^2 + 4y + 4\right)(y+2) = y^3 + 6y^2 + 12y + 8$, dus $x = (y+2)^3 + 1$ — 1
- Herleiden geeft $y = -2 + \sqrt[3]{x-1}$ (dus geldt inderdaad $f^{\text{inv}}(x) = -2 + \sqrt[3]{x-1}$) — 1

of

- $f\left(f^{\text{inv}}(x)\right) = \left(-2 + \sqrt[3]{x-1}\right)^3 + 6 \cdot \left(-2 + \sqrt[3]{x-1}\right)^2 + 12 \cdot \left(-2 + \sqrt[3]{x-1}\right) + 9$ — 1
- $\left(-2 + \sqrt[3]{x-1}\right)^3 = -8 + 3 \cdot 4 \cdot \sqrt[3]{x-1} + 3 \cdot -2 \cdot \left(\sqrt[3]{x-1}\right)^2 + x - 1$ — 1
- De rest van de herleiding van $f\left(f^{\text{inv}}(x)\right)$ tot x (dus geldt inderdaad $f^{\text{inv}}(x) = -2 + \sqrt[3]{x-1}$) — 1

15 maximumscore 3

- De ondergrens van de integraal is 0, de bovengrens is $f(0) = 9$ — 1
- De inhoud van het omwentelingslichaam is gelijk aan $\pi \cdot \int_0^9 \left(-2 + \sqrt[3]{x-1}\right)^2 \, dx$ — 1
- De inhoud is 33,9 — 1

Vraag	Antwoord	Scores

16 **maximumscore 6**

- $f'(x) = 3x^2 + 12x + 12$ 1
- Voor P geldt $3x^2 + 12x + 12 = 0$; dit geeft $(x+2)^2 = 0$, dus $x = -2$ 1
- Voor Q geldt (vanwege de symmetrie in de lijn met vergelijking $y = x$) $y = -2$ 1
- ($f(-2) = 1$, dus) $P(-2, 1)$ en $Q(1, -2)$ 1
- De richtingscoëfficiënt van de lijn door P en Q is $(\frac{-2-1}{1--2} =) -1$ 1
- De y-coördinaat van S is dus $1 + 2 \cdot -1 = -1$ 1

of

- $f^{\text{inv}}{}'(x) = \frac{1}{3}(x-1)^{-\frac{2}{3}} = \dfrac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{(x-1)^2}}$ 1
- (Als $x \to 1$, dan $f^{\text{inv}}{}'(x) \to \infty$, dus) de grafiek van $f^{\text{inv}}(x)$ heeft een verticale raaklijn als $x = 1$ (en dit is dus de x-coördinaat van Q) 1
- Voor P geldt (vanwege de symmetrie in de lijn met vergelijking $y = x$) $y = 1$ 1
- ($f^{\text{inv}}(1) = -2$, dus) $Q(1, -2)$ en $P(-2, 1)$ 1
- (Omdat Q het spiegelbeeld is van P in de lijn met vergelijking $y = x$, geldt) de richtingscoëfficiënt van de lijn door P en Q is -1 1
- De y-coördinaat van S is dus $1 + 2 \cdot -1 = -1$ 1

of

- $f'(x) = 3x^2 + 12x + 12$ 1
- Voor P geldt $3x^2 + 12x + 12 = 0$; dit geeft $(x+2)^2 = 0$, dus $x = -2$ 1
- $f^{\text{inv}}{}'(x) = \frac{1}{3}(x-1)^{-\frac{2}{3}} = \dfrac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{(x-1)^2}}$ 1
- ($f(-2) = 1$, dus) $P(-2, 1)$ en (als $x \to 1$, dan $f^{\text{inv}}{}'(x) \to \infty$, dus) de grafiek van $f^{\text{inv}}(x)$ heeft een verticale raaklijn als $x = 1$ (en dit is dus de x-coördinaat van Q); ($f^{\text{inv}}(1) = -2$, dus) $Q(1, -2)$ 1
- De richtingscoëfficiënt van de lijn door P en Q is $(\frac{-2-1}{1--2} =) -1$ 1
- De y-coördinaat van S is dus $1 + 2 \cdot -1 = -1$ 1