Formules

Goniometrie

$$\sin(t+u) = \sin(t)\cos(u) + \cos(t)\sin(u)$$
$$\sin(t-u) = \sin(t)\cos(u) - \cos(t)\sin(u)$$
$$\cos(t+u) = \cos(t)\cos(u) - \sin(t)\sin(u)$$
$$\cos(t-u) = \cos(t)\cos(u) + \sin(t)\sin(u)$$

$$\sin(2t) = 2\sin(t)\cos(t)$$
$$\cos(2t) = \cos^2(t) - \sin^2(t) = 2\cos^2(t) - 1 = 1 - 2\sin^2(t)$$

Kromme K

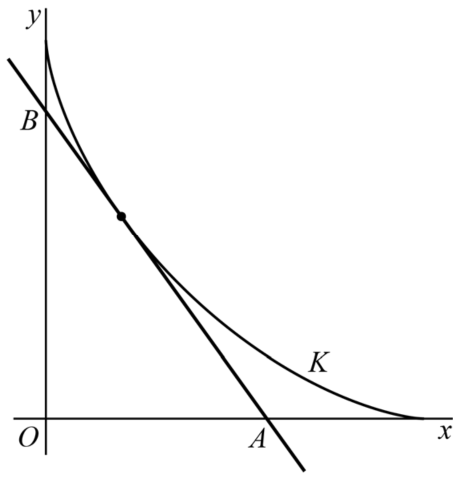
De kromme K is gegeven door de bewegingsvergelijkingen:

$$\begin{cases} x(t) = \cos^3(t) \\ y(t) = \sin^3(t) \end{cases} \text{ met } 0 < t < \tfrac{1}{2}\pi$$

In de figuur is kromme K getekend. Ook is voor een waarde van t in het bijbehorende punt van K de raaklijn aan K getekend.

De helling in het punt $(x(t), y(t))$ van K kan worden berekend met: $-\dfrac{\sin(t)}{\cos(t)}$

figuur



3p **1** Bewijs dit.

Een vergelijking van de raaklijn in het punt $(x(t), y(t))$ van K is:

$$y = -\frac{\sin(t)}{\cos(t)}x + \sin(t)$$

3p **2** Bewijs dat deze vergelijking juist is.

De raaklijn snijdt de x-as in punt A en de y-as in punt B.

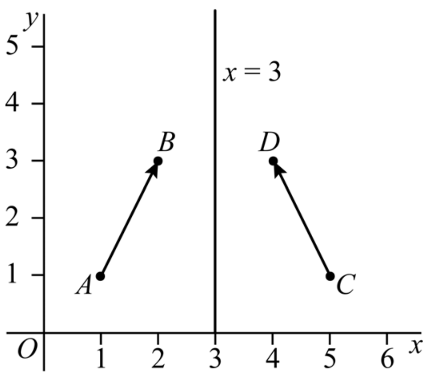
3p **3** Bewijs dat de lengte van het lijnstuk AB constant is.

Vectoren spiegelen

Wanneer een vector in een lijn wordt gespiegeld, wordt zowel het beginpunt als het eindpunt van de vector in die lijn gespiegeld.
Het resultaat is een nieuwe vector die het gespiegelde beginpunt en het gespiegelde eindpunt verbindt.

In figuur 1 is een voorbeeld weergegeven. Daarin wordt vector $\overrightarrow{AB}$, met $A(1,1)$ en $B(2,3)$, gespiegeld in de lijn met vergelijking $x=3$. Het spiegelbeeld is dan vector $\overrightarrow{CD}$, met $C(5,1)$ en $D(4,3)$.

figuur 1



Gegeven is punt $F(7,2)$ en vector $\overrightarrow{OF}$.

Vector $\overrightarrow{OF}$ wordt in de x-as gespiegeld. Het spiegelbeeld is vector $\overrightarrow{OG}$.
Voor één bepaalde combinatie van p en q geldt $p \cdot \overrightarrow{OF} + q \cdot \overrightarrow{OG} = \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \end{pmatrix}$.

4p **4** Bereken exact deze waarden van p en q.

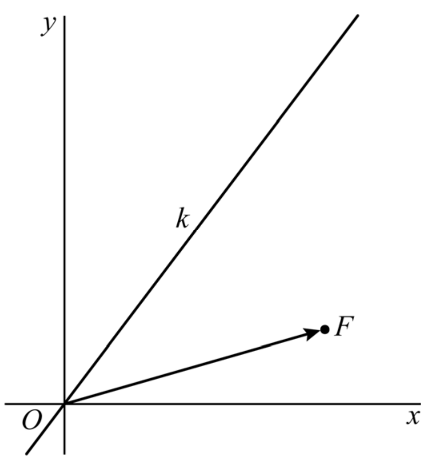
Ook is gegeven de lijn k met vectorvoorstelling $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Zie figuur 2.

Vector $\overrightarrow{OF}$ wordt gespiegeld in lijn k.

5p **5** Onderzoek met algebraïsche berekeningen of het spiegelbeeld van $\overrightarrow{OF}$ links of rechts van de y-as ligt.

figuur 2



Raaklijnen bij een vierdegraadsfunctie

De functie f_p is gegeven door:

$$f_p(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^3 + px$$

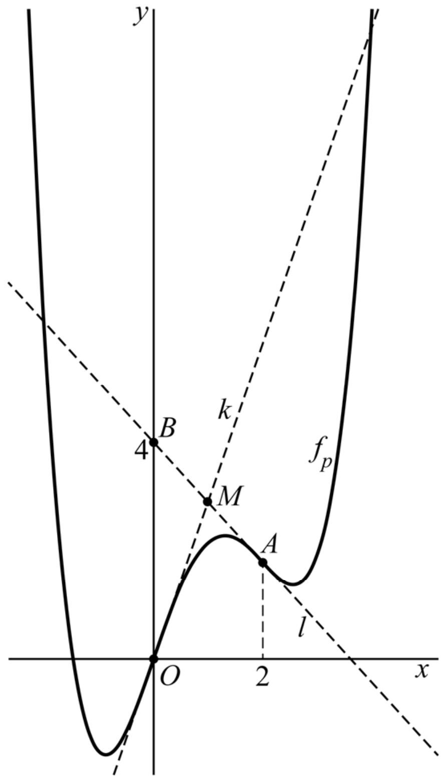
De lijn k heeft vergelijking $y = px$.
Lijn k raakt de grafiek van f_p voor iedere waarde van p in de oorsprong.

De lijn l is de raaklijn aan de grafiek van f_p in het punt A met x-coördinaat 2.
Lijn l snijdt de y-as voor elke waarde van p in het punt $B(0, 4)$.

Punt M is het snijpunt van lijn k en lijn l.

In figuur 1 is de grafiek van f_p weergegeven voor een waarde van p.
De raaklijnen k en l zijn gestippeld weergegeven.

figuur 1

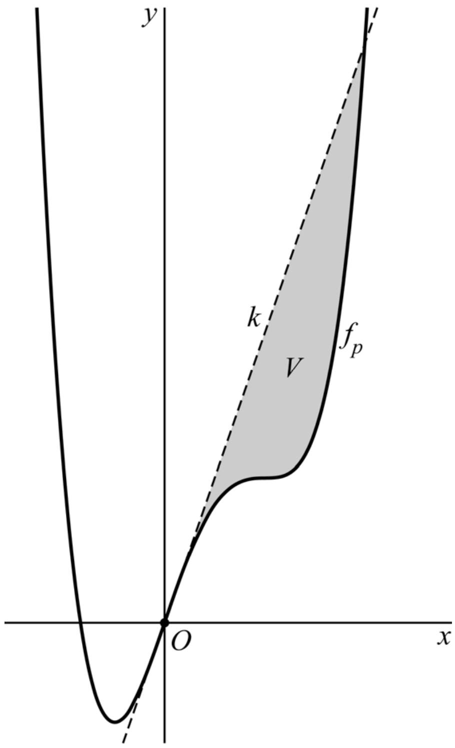


4p **6** Bewijs dat M het midden is van lijnstuk AB.

De lijn k en de grafiek van f_p sluiten een vlakdeel V in. In figuur 2 is voor een waarde van p vlakdeel V grijs weergegeven.

5p **7** Bereken exact de oppervlakte van V.

figuur 2



Bankenformules

Op een spaarrekening wordt een bedrag gestort. Het jaarlijkse rentepercentage op deze spaarrekening is constant. Hierdoor groeit het bedrag op de spaarrekening exponentieel. Voor de spaarder is het interessant om te weten na hoeveel jaar het bedrag is verdubbeld.

De verdubbelingstijd is exact te berekenen met de formule $T = \dfrac{\ln(2)}{\ln\left(1+\frac{p}{100}\right)}$.

Hierin is T de verdubbelingstijd in jaren en p het jaarlijkse rentepercentage.

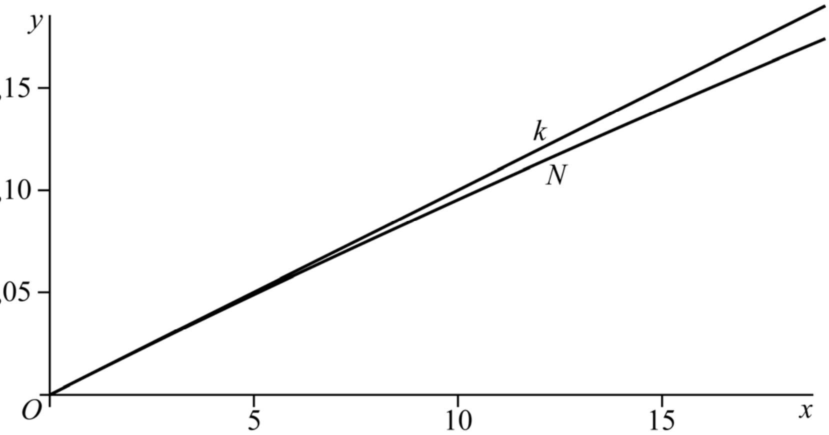
4p **8** Bewijs dat deze formule voor T correct is.

Als je geen rekenmachine gebruikt, is de formule voor T onhandig. Daarom gebruiken bankmedewerkers, als zij de verdubbelingstijd willen weten, formules die de exacte verdubbelingstijd benaderen. Zulke formules noemen we **bankenformules**. Om zo'n bankenformule te vinden onderzoeken we eerst de noemer van de formule voor T. We bekijken dus de functie N gegeven door:

$$N(x) = \ln\left(1+\frac{x}{100}\right) \text{ (met } x \geq 0\text{)}$$

In de figuur is de grafiek van N getekend. Ook is de raaklijn k aan de grafiek van N in O getekend.

figuur



Een vergelijking van k is $y = \frac{1}{100}x$. Als $x > 0$ ligt de grafiek van N onder lijn k. Verder geldt: als x groter wordt, dan wordt de verticale afstand tussen de grafiek van N en lijn k groter.

4p **9** Bewijs met behulp van differentiëren dat de verticale afstand tussen de grafiek van N en lijn k inderdaad groter wordt als x groter wordt.

Voor kleine positieve waarden van x ligt lijn k dicht bij de grafiek van N. Je kunt dus zeggen dat voor kleine positieve waarden van p geldt dat $\ln\left(1+\frac{p}{100}\right)$ ongeveer gelijk is aan $\frac{1}{100}p$. Dan geldt dus:

$$T \approx \frac{\ln(2)}{\frac{1}{100}p} \text{ ofwel } T \approx \frac{100\cdot\ln(2)}{p} \approx \frac{70}{p}$$

Daarmee is een voorbeeld gevonden van een bankenformule: de exacte verdubbelingstijd T kan voor kleine positieve waarden van p benaderd worden door $\frac{70}{p}$ te berekenen. Deze benadering noemen we T_1.

De benadering met de formule $T_1 = \frac{70}{p}$ verschilt voor toenemende waarden van p steeds meer van de waarde volgens de exacte formule, waarmee de benadering dus steeds slechter wordt. Daarom wordt in de praktijk het getal 70 in de teller aangepast als p groter wordt, bijvoorbeeld naar 72. Deze benadering noemen we T_2.

In de tabel wordt voor twee waarden van p de verdubbelingstijd in jaren volgens de bankenformules $T_1 = \frac{70}{p}$ en $T_2 = \frac{72}{p}$ vergeleken met de verdubbelingstijd volgens de exacte formule.

tabel

	rentepercentage	
	$p = 1{,}5$	$p = 5{,}5$
exacte formule $T = \frac{\ln(2)}{\ln\left(1+\frac{p}{100}\right)}$	46,56	12,95
bankenformule $T_1 = \frac{70}{p}$	46,67	12,73
bankenformule $T_2 = \frac{72}{p}$	48,00	13,09

In de tabel is te zien dat voor $p = 1{,}5$ de bankenformule $T_1 = \frac{70}{p}$ een betere benadering geeft dan de bankenformule $T_2 = \frac{72}{p}$. In de tabel is ook te zien dat voor $p = 5{,}5$ de benadering met $T_2 = \frac{72}{p}$ beter is dan met $T_1 = \frac{70}{p}$.

Vanaf een bepaald rentepercentage p geeft de formule $T_2 = \frac{72}{p}$ een betere benadering van de exacte verdubbelingstijd dan de formule $T_1 = \frac{70}{p}$.

5p **10** Bereken dit rentepercentage p. Geef je eindantwoord in één decimaal.

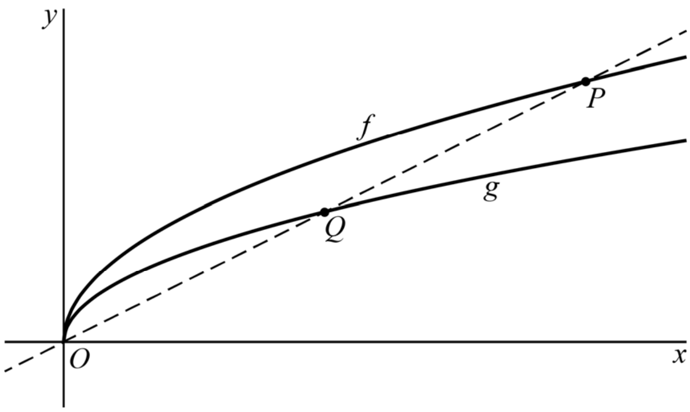
Twee wortelgrafieken

De functies f en g zijn gegeven door $f(x) = 2\sqrt{x}$ en $g(x) = \sqrt{2x}$.
Op de grafiek van f ligt het punt $P\left(p, 2\sqrt{p}\right)$.

De helling van de grafiek van f in P is gelijk aan $\dfrac{1}{\sqrt{p}}$.

De lijn door O en P snijdt de grafiek van g in het punt Q. Deze situatie is weergegeven in figuur 1.

figuur 1

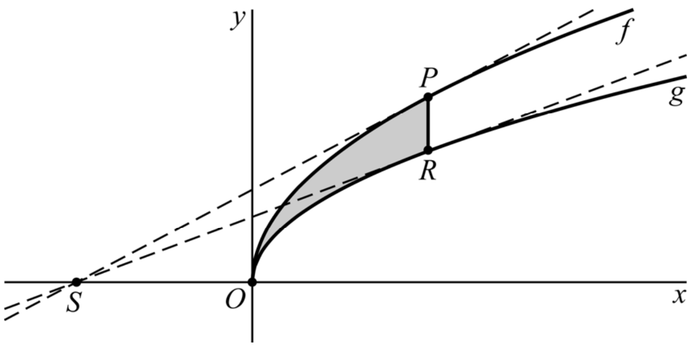


De helling van de grafiek van g in punt Q is voor elke waarde van p gelijk aan de helling van de grafiek van f in punt P.

6p **11** Bewijs dit.

We kiezen nu $p = 4$. Punt R ligt op de grafiek van g recht onder punt P.
De raaklijnen in P en R snijden elkaar in het punt $S(-4, 0)$. Zie figuur 2.

figuur 2



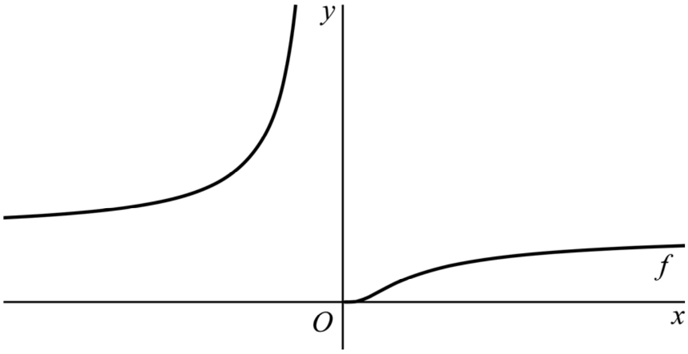
Het lijnstuk PR en de grafieken van f en g sluiten een vlakdeel in. Dit vlakdeel is in figuur 2 grijsgemaakt.

6p **12** Bereken exact de verhouding tussen de oppervlakte van dit vlakdeel en de oppervlakte van driehoek PRS.

Asymptoten en raaklijnen

De functie f is gegeven door $f(x) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$.
In figuur 1 is de grafiek van f weergegeven.

figuur 1



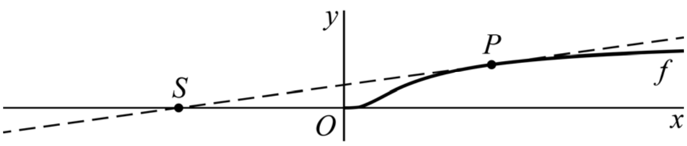
De grafiek van f heeft twee asymptoten. Daarom heeft de grafiek van de inverse functie van f ook twee asymptoten.

3p **13** Stel met behulp van exacte berekeningen vergelijkingen op van de asymptoten van de grafiek van de inverse functie van f.

De afgeleide functie van f wordt gegeven door $f'(x) = \frac{1}{x^2} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$.

In de rest van de opgave is het domein van f beperkt tot $x > 0$.
De raaklijn aan de grafiek van f in een punt P snijdt de x-as in een punt S.
Zie figuur 2.

figuur 2

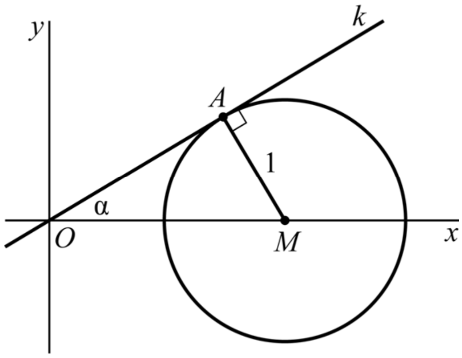


De x-coördinaat van S hangt af van de positie van P op de grafiek van f.
Er is een positie van P waarvoor de x-coördinaat van S maximaal is.

7p **14** Bereken exact deze maximale waarde van de x-coördinaat van S.

Driehoek in cirkel

figuur 1



Een lijn k gaat door de oorsprong O en maakt een hoek α met de positieve x-as, met $0° < \alpha < 90°$.

Op de positieve x-as ligt een punt M zo dat de cirkel met middelpunt M en straal 1 lijn k raakt. Punt A is het raakpunt en hoek OAM is dus $90°$.

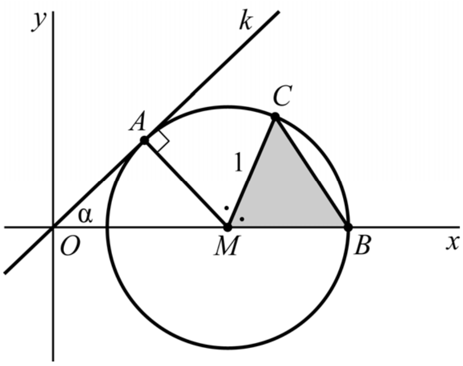
In figuur 1 is de situatie voor een bepaalde waarde van α weergegeven.

De coördinaten van $A(x_A, y_A)$ kunnen worden uitgedrukt in α.

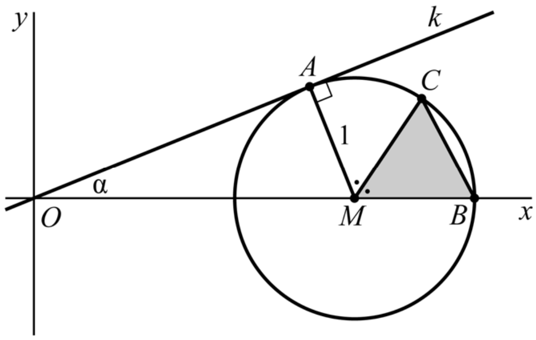
5p **15** Bereken de waarde van α waarvoor $x_A = \frac{1}{2}$. Geef je eindantwoord in hele graden.

Voor elke hoek α (met $0° < \alpha < 90°$) raakt lijn k de cirkel in punt A. Verder snijdt de cirkel de x-as rechts van het middelpunt in een punt B. Op de cirkel ligt een punt C boven de x-as, zo dat de lijn door M en C hoek AMB middendoor deelt. De positie van M, en dus ook de oppervlakte van driehoek MBC, hangt af van hoek α. In figuur 2 en 3 is voor twee verschillende waarden van α de situatie weergegeven.

figuur 2



figuur 3



Als α nadert naar 0, neemt de oppervlakte van driehoek MBC af tot een grenswaarde.

5p **16** Bereken exact deze grenswaarde.