Vraag	Antwoord	Scores

Kromme K

1 maximumscore 3

- $x'(t) = -3\cos^2(t) \cdot \sin(t)$ — 1
- $y'(t) = 3\sin^2(t) \cdot \cos(t)$ — 1
- De helling is $\dfrac{y'(t)}{x'(t)} = \dfrac{3\sin^2(t) \cdot \cos(t)}{-3\cos^2(t) \cdot \sin(t)}$ en de verdere herleiding tot $\dfrac{y'(t)}{x'(t)} = -\dfrac{\sin(t)}{\cos(t)}$ — 1

2 maximumscore 3

- Een vergelijking van de raaklijn is $y = -\dfrac{\sin(t)}{\cos(t)}x + b$ en gaat door $\left(\cos^3(t), \sin^3(t)\right)$ — 1
- Dit geeft: $b = \sin^3(t) + \sin(t) \cdot \cos^2(t) = \sin(t) \cdot \left(\sin^2(t) + \cos^2(t)\right)$ — 1
- $\cos^2(t) + \sin^2(t) = 1$ geeft $b = \sin(t)$ (dus is de vergelijking juist) — 1

of

- $\cos^3(t)$ invullen in de vergelijking geeft: $y = -\dfrac{\sin(t)}{\cos(t)} \cdot \cos^3(t) + \sin(t) = -\sin(t) \cdot \cos^2(t) + \sin(t)$ — 1
- $\cos^2(t) = 1 - \sin^2(t)$ geeft $y = -\sin(t)\left(1 - \sin^2(t)\right) + \sin(t)$ — 1
- Dit is gelijk aan $\sin^3(t)$ (dus ligt $\left(\cos^3(t), \sin^3(t)\right)$ op de lijn) — 1

3 maximumscore 3

- Raaklijn snijden met de y-as geeft $y_B = \sin(t)$ — 1
- Raaklijn snijden met de x-as: $-\dfrac{\sin(t)}{\cos(t)}x_A + \sin(t) = 0$ geeft $x_A = \cos(t)$ — 1
- De lengte van het lijnstuk AB is $\sqrt{\sin^2(t) + \cos^2(t)} = 1$ — 1

Vraag	Antwoord	Scores

Vectoren spiegelen

4 maximumscore 4

- $\overrightarrow{OG}=\begin{pmatrix}7\\-2\end{pmatrix}$ 1
- $p\cdot\overrightarrow{OF}+q\cdot\overrightarrow{OG}=\begin{pmatrix}7p+7q\\2p-2q\end{pmatrix}$ 1
- Beschrijven hoe het stelsel $\begin{cases}7p+7q=7\\2p-2q=-3\end{cases}$ exact kan worden opgelost 1
- $p=-\frac{1}{4}$ en $q=\frac{5}{4}$ 1

5 maximumscore 5

- Als S de loodrechte projectie van F op k is, dan is $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\\2\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}$ een vectorvoorstelling van de lijn door F en S 1
- S ligt op k en op de lijn door F en S, dus $\begin{pmatrix}7\\2\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}=t\cdot\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$ 1
- De oplossing van dit stelsel is $s=-\frac{22}{25}$ (en $t=\frac{29}{25}$) 1
- Dus $x_S=3\frac{12}{25}$ 1
- Dit is minder dan de helft van $x_F=7$, dus ligt het spiegelbeeld links van de y-as 1

of

- Een vergelijking van k is $y=\frac{4}{3}x$ 1
- Een vergelijking van de lijn loodrecht op k en door F is $y=-\frac{3}{4}(x-7)+2$ 1
- De x-coördinaat van het snijpunt S kan worden berekend met $\frac{4}{3}x=-\frac{3}{4}(x-7)+2$ 1
- Dit geeft $x_S=3\frac{12}{25}$ 1
- $x_{F'}=x_F-2\cdot\left(x_F-x_S\right)=-\frac{1}{25}$ (of: $x_{F'}=x_S-\left(x_F-x_S\right)=-\frac{1}{25}$) (met F' het eindpunt van het spiegelbeeld) en dus ligt het spiegelbeeld links van de y-as 1

of

Vraag	Antwoord	Scores

- Voor de hoek α tussen $\overrightarrow{OF}$ en lijn k geldt
  $\cos(\alpha) = \dfrac{\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}7\\2\end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}\right|\cdot\left|\begin{pmatrix}7\\2\end{pmatrix}\right|}$ $(=0,796...)$ 1
- Hieruit volgt $\alpha = 37,1...°$ 1
- Voor de hoek β tussen k en de y-as geldt $\cos(\beta) = \dfrac{\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}\right|\cdot\left|\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right|}$ $(=0,8)$ 1
- Hieruit volgt $\beta = 36,8...°$ 1
- Omdat $\beta < \alpha$ (en bij spiegeling de hoek tussen de vector en lijn k gelijk blijft) ligt het spiegelbeeld links van de y-as 1

of

- Voor de hoek α_1 tussen $\overrightarrow{OF}$ en de x-as geldt $\tan(\alpha_1) = \frac{2}{7}$ 1
- Voor de hoek α_2 tussen lijn k en de x-as geldt $\tan(\alpha_2) = \frac{4}{3}$, dus
  $\alpha = \alpha_2 - \alpha_1 = 37,1...°$ 1
- Voor de hoek β tussen k en de y-as geldt $\tan(\beta) = \frac{3}{4}$ (of $\beta = 90° - \alpha_2$) 1
- Hieruit volgt $\beta = 36,8...°$ 1
- Omdat $\beta < \alpha$ (en bij spiegeling de hoek tussen de vector en lijn k gelijk blijft) ligt het spiegelbeeld links van de y-as 1

of

- Voor de hoek α_1 tussen $\overrightarrow{OF}$ en de x-as geldt $\tan(\alpha_1) = \frac{2}{7}$ 1
- Voor de hoek α_2 tussen lijn k en de x-as geldt $\tan(\alpha_2) = \frac{4}{3}$, dus
  $\alpha = \alpha_2 - \alpha_1 = 37,1...°$ 1
- De hoek van de gespiegelde vector met de x-as is $\alpha_2 + \alpha$ 1
- Deze hoek is $53,1... + 37,1... = 90,...(°)$ 1
- Dit is meer dan $90\,(°)$ dus ligt de gespiegelde vector links van de y-as 1

Vraag	Antwoord	Scores

Raaklijnen bij een vierdegraadsfunctie

6 maximumscore 4

- $f_p'(x) = x^3 - 3x^2 + p$ 1
- $f_p'(2) = p - 4$ dus een vergelijking van l is $y = (p-4)x + 4$ 1
- De oplossing van de vergelijking $px = (p-4)x + 4$ is de x-coördinaat van M 1
- De oplossing is (voor alle p) $x = 1$ (en dus is M het midden van AB) 1

of

- $f_p(2) = 2p - 4$ dus $A(2, 2p-4)$ 1
- Lijn l door $A(2, 2p-4)$ en $B(0, 4)$ heeft vergelijking $y = (p-4)x + 4$ 1
- De oplossing van de vergelijking $px = (p-4)x + 4$ is de x-coördinaat van M 1
- De oplossing is (voor alle p) $x = 1$ (en dus is M het midden van AB) 1

of

- $f_p(2) = 2p - 4$ dus $A(2, 2p-4)$ 1
- Het midden van AB is $(1, p)$ 1
- $(1, p)$ ligt op de lijn door A en B en daarmee op lijn l 1
- $p \cdot 1 = p$ dus $(1, p)$ ligt op k (en dus is het midden van AB het snijpunt van k en l) 1

7 maximumscore 5

- De vergelijking $\frac{1}{4}x^4 - x^3 + px = px$ moet worden opgelost 1
- De oplossingen zijn $x = 0$ en $x = 4$ 1
- De oppervlakte van V is gelijk aan $\int_0^4 \left(px - \left(\frac{1}{4}x^4 - x^3 + px\right)\right)\mathrm{d}x = \int_0^4 \left(-\frac{1}{4}x^4 + x^3\right)\mathrm{d}x$ 1
- Een primitieve van $-\frac{1}{4}x^4 + x^3$ is $-\frac{1}{20}x^5 + \frac{1}{4}x^4$ 1
- De oppervlakte van V is $12\frac{4}{5}$ 1

Vraag	Antwoord	Scores

Bankenformules

8 maximumscore 4

- Bij groeipercentage p hoort groeifactor $1+\frac{p}{100}$ 1
- Bij verdubbelingstijd T geldt $\left(1+\frac{p}{100}\right)^T = 2$ 1
- $\ln\left(\left(1+\frac{p}{100}\right)^T\right) = T \cdot \ln\left(1+\frac{p}{100}\right)$ 1
- Hieruit volgt $T \cdot \ln\left(1+\frac{p}{100}\right) = \ln(2)$ dus $T = \dfrac{\ln(2)}{\ln\left(1+\frac{p}{100}\right)}$ 1

of

- Uit $g^T = 2$ volgt $T = {}^{g}\log(2)$ 1
- Dus $T = \dfrac{\ln(2)}{\ln(g)}$ 1
- Bij groeipercentage p hoort groeifactor ($g =$) $1+\frac{p}{100}$ 1
- Dus $T = \dfrac{\ln(2)}{\ln\left(1+\frac{p}{100}\right)}$ 1

9 maximumscore 4

- De formule voor de verticale afstand A tussen lijn k en de grafiek van f is $A(x) = \frac{1}{100}x - \ln\left(1+\frac{x}{100}\right)$ (met $x > 0$) 1
- $A'(x) = \frac{1}{100} - \frac{1}{100+x}$ (of een gelijkwaardige uitdrukking) 2
- Een redenering waaruit volgt dat $A'(x) > 0$ (en dus wordt de verticale afstand groter) 1

of

- De formule voor de verticale afstand A tussen lijn k en de grafiek van f is $A(x) = \frac{1}{100}x - \ln\left(1+\frac{x}{100}\right)$ (met $x > 0$) 1
- $A'(x) = \frac{1}{100} - \frac{1}{100+x}$ (of een gelijkwaardige uitdrukking) 2
- $A''(x) = \dfrac{1}{(100+x)^2} > 0$ (en dus wordt de verticale afstand groter) 1

Opmerking
Voor het tweede antwoordelement mogen uitsluitend 0 of 2 scorepunten worden toegekend.

Vraag	Antwoord	Scores

10 maximumscore 5

- Het verschil tussen T en T_1 is $\dfrac{\ln(2)}{\ln\left(1+\frac{p}{100}\right)}-\dfrac{70}{p}$ (of $\left|\dfrac{\ln(2)}{\ln\left(1+\frac{p}{100}\right)}-\dfrac{70}{p}\right|$) 1
- Het verschil tussen T en T_2 is $\dfrac{72}{p}-\dfrac{\ln(2)}{\ln\left(1+\frac{p}{100}\right)}$ (of $\left|\dfrac{\ln(2)}{\ln\left(1+\frac{p}{100}\right)}-\dfrac{72}{p}\right|$) 1
- De vergelijking $\dfrac{\ln(2)}{\ln\left(1+\frac{p}{100}\right)}-\dfrac{70}{p}=\dfrac{72}{p}-\dfrac{\ln(2)}{\ln\left(1+\frac{p}{100}\right)}$ moet worden opgelost 1
- Dit geeft $p=4{,}9...$ 1
- Het gevraagde rentepercentage is 5,0 1

of

- Het verschil tussen T en T_1 is $\dfrac{\ln(2)}{\ln\left(1+\frac{p}{100}\right)}-\dfrac{70}{p}$ (of $\left|\dfrac{\ln(2)}{\ln\left(1+\frac{p}{100}\right)}-\dfrac{70}{p}\right|$) 1
- Het verschil tussen T en T_2 is $\dfrac{72}{p}-\dfrac{\ln(2)}{\ln\left(1+\frac{p}{100}\right)}$ (of $\left|\dfrac{\ln(2)}{\ln\left(1+\frac{p}{100}\right)}-\dfrac{72}{p}\right|$) 1
- Beschrijven hoe bovenstaande verschilformules in een tabel kunnen worden weergegeven 1
- $p=4{,}9$ geeft 0,203… respectievelijk 0,204… en $p=5{,}0$ geeft 0,206… respectievelijk 0,193… 1
- Het gevraagde rentepercentage is 5,0 1

Opmerking
Als in de verschilformules de termen zijn verwisseld, hiervoor geen scorepunten in mindering brengen.

Vraag	Antwoord	Scores

Twee wortelgrafieken

11 maximumscore 6

- $g'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2x}}$ (of een gelijkwaardige uitdrukking) 1
- De lijn door O en P heeft vergelijking $y=\dfrac{2}{\sqrt{p}}x$ 1
- Voor punt Q moet gelden $\dfrac{2}{\sqrt{p}}x=\sqrt{2x}$ 1
- Dan volgt ($x=0$ of) $\dfrac{4}{p}\cdot x=2$ 1
- Dit geeft $x_Q=\frac{1}{2}p$ 1
- $g'(\frac{1}{2}p)=(\dfrac{1}{\sqrt{2\cdot\frac{1}{2}p}}=)\,\dfrac{1}{\sqrt{p}}$ (en dat is gelijk aan $f'(p)$) 1

12 maximumscore 6

- De y-coördinaat van P is 4 en de y-coördinaat van R is $\sqrt{8}$ $(=2\sqrt{2})$ 1
- De oppervlakte van driehoek PRS is $\frac{1}{2}\cdot 8\cdot\left(4-2\sqrt{2}\right)=8\left(2-\sqrt{2}\right)$ 1
- De oppervlakte van het vlakdeel is $\displaystyle\int_0^4\left(2\sqrt{x}-\sqrt{2x}\right)\mathrm{d}x$

  (of $\displaystyle\int_0^4\left(2-\sqrt{2}\right)\sqrt{x}\,\mathrm{d}x$) 1
- Een primitieve van $2\sqrt{x}-\sqrt{2x}$ is $\frac{4}{3}x\sqrt{x}-\frac{2}{3}x\sqrt{2x}$ (of $\frac{2}{3}\left(2-\sqrt{2}\right)x\sqrt{x}$) 1
- De oppervlakte van het vlakdeel is $\frac{32}{3}-\frac{16}{3}\sqrt{2}$ (of $\frac{16}{3}\left(2-\sqrt{2}\right)$) 1
- De verhouding tussen de oppervlakte van het vlakdeel en de oppervlakte van driehoek PRS is 2 : 3 (of een gelijkwaardige verhouding) (of: de oppervlakte van driehoek PRS is 1,5 keer zo groot als de oppervlakte van het vlakdeel) 1

Vraag	Antwoord	Scores

Asymptoten en raaklijnen

13 maximumscore 3

- $\lim\limits_{x\to\infty} e^{-\frac{1}{x}}=1$ (of $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-\frac{1}{x}}=1$), dus de grafiek van f heeft een horizontale asymptoot met vergelijking $y=1$ — 1
- $\lim\limits_{x\uparrow 0} e^{-\frac{1}{x}}=\infty$, dus de grafiek van f heeft een verticale asymptoot met vergelijking $x=0$ — 1
- Dus de grafiek van de inverse functie van f heeft een horizontale asymptoot met vergelijking $y=0$ en een verticale asymptoot met vergelijking $x=1$ — 1

of

- De inverse functie van f is gegeven door $f^{\text{inv}}(x)=\dfrac{-1}{\ln(x)}$ — 1
- $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{-1}{\ln(x)}\right)=0$, dus de grafiek van de inverse functie van f heeft een horizontale asymptoot met vergelijking $y=0$ — 1
- $\lim\limits_{x\downarrow 1}\left(\dfrac{-1}{\ln(x)}\right)=-\infty$ (of $\lim\limits_{x\uparrow 1}\left(\dfrac{-1}{\ln(x)}\right)=\infty$), dus de grafiek van de inverse functie van f heeft een verticale asymptoot met vergelijking $x=1$ — 1

Opmerking
Als de kandidaat bij het tweede antwoordelement van het eerste antwoordalternatief geen limiet gebruikt, maar een argument noemt als ‘voor $x=0$ is $\frac{1}{x}$ en dus f niet gedefinieerd’, hiervoor geen scorepunten in mindering brengen.

Vraag	Antwoord	Scores

14 maximumscore 7

- Een vergelijking van de raaklijn in P met x-coördinaat p is $y - \mathrm{e}^{-\frac{1}{p}} = \frac{1}{p^2} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{p}} \cdot (x - p)$ (of een gelijkwaardige uitdrukking) 2
- De x-coördinaat van S is oplossing van de vergelijking $-\mathrm{e}^{-\frac{1}{p}} = \frac{1}{p^2} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{p}} \cdot (x - p)$ 1
- Dit geeft $x_S = -p^2 + p$ 1
- x_S is maximaal als $-2p + 1 = 0$ 1
- Dit geeft $p = \frac{1}{2}$ 1
- De maximale waarde van x_S is $\frac{1}{4}$ 1

of

- De raaklijn die de x-as snijdt in punt S met de grootste x-coördinaat is de raaklijn in het buigpunt van de grafiek van f 1
- $f''(x) = \frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{x^2} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} - \frac{2}{x^3} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$ 1
- $f''(x) = 0$ geeft $\frac{1}{x^4} = \frac{2}{x^3}$ 1
- De x-coördinaat van het buigpunt is $\frac{1}{2}$ 1
- De y-coördinaat van het buigpunt is e^{-2} 1
- De richtingscoëfficiënt van de raaklijn in het buigpunt is $4\mathrm{e}^{-2}$ 1
- Hieruit volgt dat deze raaklijn de x-as snijdt voor $x = \frac{1}{4}$ (dus de maximale waarde van x_S is $\frac{1}{4}$) 1

Opmerking
Voor het eerste antwoordelement van het eerste antwoordalternatief mogen uitsluitend 0 of 2 scorepunten worden toegekend.

Vraag	Antwoord	Scores

Driehoek in cirkel

15 maximumscore 5

- In driehoek OAM geldt: $\tan(\alpha)=\frac{1}{OA}$ en $\tan(\alpha)=\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$ 1
- Hieruit volgt $OA=\frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}$ 1
- $x_A=\frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}\cdot\cos(\alpha)$ 1
- Beschrijven hoe de vergelijking $\frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}\cdot\cos(\alpha)=\frac{1}{2}$ kan worden opgelost 1
- De gevraagde waarde van α is $51(°)$ 1

of

- In driehoek OAM geldt: $\sin(\alpha)=\frac{1}{OM}$ ofwel $OM=\frac{1}{\sin(\alpha)}$ 1
- Met A' de loodrechte projectie van A op de x-as geldt: $MA'=\sin(\alpha)$ 1
- $x_A=\frac{1}{\sin(\alpha)}-\sin(\alpha)$ 1
- Beschrijven hoe de vergelijking $\frac{1}{\sin(\alpha)}-\sin(\alpha)=\frac{1}{2}$ kan worden opgelost 1
- De gevraagde waarde van α is $51(°)$ 1

of

- Met A' de loodrechte projectie van A op de x-as geldt: $\tan(\alpha)=\frac{AA'}{OA'}$ 1
- In driehoek OAA' is $AA'=\frac{1}{2}\tan(\alpha)$ 1
- In driehoek MAA' is $AA'=\cos(\alpha)$ 1
- Beschrijven hoe de vergelijking $\frac{1}{2}\tan(\alpha)=\cos(\alpha)$ kan worden opgelost 1
- De gevraagde waarde van α is $51(°)$ 1

of

Vraag	Antwoord	Scores

- Voor lijn k geldt: $y = ax$ dus voor punt A geldt: $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}a)$ 1
- Uit $rc_k = a$ volgt dat $rc_{AM} = -\frac{1}{a}$ en een vergelijking van de lijn door A en M is $y = -\frac{1}{a}x + \frac{1}{2}a + \frac{1}{2a}$ 1
- Het snijpunt van deze lijn met de x-as is $M\left(\frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}, 0\right)$ en dan volgt (met behulp van de stelling van Pythagoras) $\left(\frac{1}{2}a^2\right)^2 + \left(\frac{1}{2}a\right)^2 = 1$ 1
- Beschrijven hoe hieruit de waarde $a = 1,24...$ gevonden kan worden 1
- De gevraagde waarde van α is 51(°) 1

of

- Er geldt: $\tan(\alpha) = \frac{y_A}{x_A} = \frac{y_A}{\frac{1}{2}} (= 2y_A)$ 1
- $\sin(\angle AMO) = \sin(90° - \alpha) = \frac{y_A}{1} (= y_A)$ 1
- Dus $\tan(\alpha) = 2 \cdot \sin(90° - \alpha)$ 1
- Beschrijven hoe de vergelijking $\tan(\alpha) = 2 \cdot \sin(90° - \alpha)$ kan worden opgelost 1
- De gevraagde waarde van α is 51(°) 1

16 maximumscore 5

- $\angle BMA = (180° - (90° - \alpha) =)\ \alpha + 90°$ 1
- $\angle BMC = (\frac{1}{2}\angle BMA =)\ \frac{1}{2}\alpha + 45°$ 1
- Als α naar 0 nadert, nadert $\angle BMC$ naar 45° 1
- Met C' de loodrechte projectie van C op de x-as geldt: $CC' = \sin(\angle BMC)$. Dus (omdat $BM = 1$) de oppervlakte van driehoek MBC is $\frac{1}{2}\sin(45°)$ 1
- Als α naar 0 nadert, nadert de oppervlakte naar $\frac{1}{4}\sqrt{2}$ (en dus is de gevraagde grenswaarde $\frac{1}{4}\sqrt{2}$) 1