

Vraag	Antwoord	Scores
-------	----------	--------

**Een vierkant en vier vectoren**

8 maximumscore 6

- $\vec{CP} = \begin{pmatrix} p \\ -1 \end{pmatrix}$  en  $\vec{CA} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$  1

- $\cos(\angle PCA) = \frac{\begin{pmatrix} p \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}}{\left| \begin{pmatrix} p \\ -1 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right|}$  1

- Dit is gelijk aan  $\frac{p+1}{\sqrt{p^2+1} \cdot \sqrt{2}}$  1

- ( $\vec{CQ} = \begin{pmatrix} \frac{1}{p} \\ -1 \end{pmatrix}$  dus) ( $p$  vervangen door  $\frac{1}{p}$  geeft)

$$\cos(\angle ACQ) = \frac{\frac{1}{p} + 1}{\sqrt{\left(\frac{1}{p}\right)^2 + 1} \cdot \sqrt{2}}$$
1

- Teller en noemer van  $\frac{\frac{1}{p} + 1}{\sqrt{\left(\frac{1}{p}\right)^2 + 1} \cdot \sqrt{2}}$  vermenigvuldigen met  $p$  geeft

$$\frac{1+p}{\sqrt{p^2} \cdot \sqrt{\left(\frac{1}{p}\right)^2 + 1} \cdot \sqrt{2}}$$
1

- Dit is gelijk aan  $\frac{1+p}{\sqrt{1+p^2} \cdot \sqrt{2}}$ , (dus  $\cos(\angle ACQ) = \cos(\angle PCA)$ ), dus (in

deze situatie)  $\angle ACQ = \angle PCA$  (dus de hoek tussen de vectoren  $\vec{CP}$  en  $\vec{CA}$  is gelijk aan de hoek tussen de vectoren  $\vec{CA}$  en  $\vec{CQ}$ ) 1

of

Vraag	Antwoord	Scores
-------	----------	--------

- $\overrightarrow{CP} = \begin{pmatrix} p \\ -1 \end{pmatrix}$  en  $\overrightarrow{CA} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$  1

- $\cos(\angle PCA) = \frac{\begin{pmatrix} p \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}}{\left| \begin{pmatrix} p \\ -1 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right|}$  1

- Dit is gelijk aan  $\frac{p+1}{\sqrt{p^2+1} \cdot \sqrt{2}}$  1

- ( $\overrightarrow{CQ} = \begin{pmatrix} \frac{1}{p} \\ -1 \end{pmatrix}$ ) dus ( $p$  vervangen door  $\frac{1}{p}$  geeft)

$$\cos(\angle ACQ) = \frac{\frac{1}{p} + 1}{\sqrt{\left(\frac{1}{p}\right)^2 + 1} \cdot \sqrt{2}}$$
1

- Gelijkstellen van beide uitdrukkingen en vervolgens kruislings vermenigvuldigen geeft (dat bewezen moet worden):

$$\sqrt{p^2} \sqrt{\left(\frac{1}{p}\right)^2 + 1} + \sqrt{\left(\frac{1}{p}\right)^2 + 1} = \sqrt{\frac{1}{p^2}} \sqrt{p^2 + 1} + \sqrt{p^2 + 1}$$
1

- Dit geeft  $\sqrt{1+p^2} + \sqrt{\frac{1}{p^2}+1} = \sqrt{1+\frac{1}{p^2}} + \sqrt{p^2+1}$ , (en dit is inderdaad aan elkaar gelijk, dus  $\cos(\angle ACQ) = \cos(\angle PCA)$ ), dus (in deze situatie)  $\angle ACQ = \angle PCA$  (dus de hoek tussen de vectoren  $\overrightarrow{CP}$  en  $\overrightarrow{CA}$  is gelijk aan de hoek tussen de vectoren  $\overrightarrow{CA}$  en  $\overrightarrow{CQ}$ ) 1

of

- De richtingscoëfficiënt van de lijn door  $C$  en  $Q$  is  $\frac{-1}{\frac{1}{p}} = -p$  1

- Het snijpunt  $R$  van de lijn door  $C$  en  $Q$  en lijnstuk  $AB$  heeft dus  $y$ -coördinaat  $1-p$  1

- $PA = 1-p$ , dus  $PA = RA$  1

- $\angle PAC = \angle RAC (= 45^\circ)$  (want  $AC$  is een diagonaal van een vierkant) 1

- Ook geldt  $CA = CA$ , dus  $\triangle CAP$  is gelijkvormig met  $\triangle CAR$  1

- Uit deze gelijkvormigheid volgt dat  $\angle ACQ = (\angle ACR =) \angle ACP$  (dus de hoek tussen de vectoren  $\overrightarrow{CP}$  en  $\overrightarrow{CA}$  is gelijk aan de hoek tussen de vectoren  $\overrightarrow{CA}$  en  $\overrightarrow{CQ}$ ) 1

of

Vraag	Antwoord	Scores
-------	----------	--------

- $\frac{OC}{OP} = \frac{1}{p}$  1
- $\frac{OQ}{OC} = \frac{\frac{1}{p}}{1} = \frac{1}{p}$  1
- Ook geldt  $\angle POC = \angle COQ$ , dus  $\triangle OPC$  is gelijkvormig met  $\triangle OCQ$  1
- $\angle OQC = \angle BCQ$  (Z-hoeken), dus  $\angle OCP = \angle OQC = \angle BCQ$  1
- $\angle ACP = 45^\circ - \angle OCP$  en  $\angle QCA = 45^\circ - \angle BCQ$  1
- Dus  $\angle ACP = \angle QCA$  (dus de hoek tussen de vectoren  $\overrightarrow{CP}$  en  $\overrightarrow{CA}$  is gelijk aan de hoek tussen de vectoren  $\overrightarrow{CA}$  en  $\overrightarrow{CQ}$ ) 1

**9 maximumscore 7**

- De coördinaten van  $M$  zijn  $(\frac{1}{2}p + \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  1
- $\overrightarrow{PB} = \begin{pmatrix} 1-p \\ 1 \end{pmatrix}$  1
- $\overrightarrow{QM} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}p + \frac{1}{2} - \frac{1}{p} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$  1
- $\overrightarrow{PB}$  staat loodrecht op  $\overrightarrow{QM}$  als  $\begin{pmatrix} 1-p \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2}p + \frac{1}{2} - \frac{1}{p} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = 0$  1
- De vergelijking  $(1-p) \cdot (\frac{1}{2}p + \frac{1}{2} - \frac{1}{p}) + 1 \cdot \frac{1}{2} = 0$  moet worden opgelost 1
- Beschrijven hoe deze vergelijking kan worden opgelost 1
- $p \approx 0,54$  (want  $0 < p < 1$ ) 1

of

- De richtingscoëfficiënt van de lijn door  $P$  en  $B$  is  $\frac{1}{1-p}$  1
- De richtingscoëfficiënt van de lijn door  $M$  loodrecht op  $PB$  is  $p-1$  1
- De coördinaten van  $M$  zijn  $(\frac{1}{2}p + \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  1
- Hieruit volgt dat een vergelijking van de lijn door  $M$  loodrecht op  $PB$  is  $y = (p-1)x - \frac{1}{2}p^2 + 1$  1
- Deze lijn gaat door  $Q$  als  $0 = (p-1) \cdot \frac{1}{p} - \frac{1}{2}p^2 + 1$  1
- Beschrijven hoe deze vergelijking kan worden opgelost 1
- $p \approx 0,54$  (want  $0 < p < 1$ ) 1

of

Vraag	Antwoord	Scores
	<ul style="list-style-type: none"> <li>In dit geval is de lijn door <math>M</math> en <math>Q</math> de middelloodlijn van lijnstuk <math>PB</math></li> </ul>	2
	<ul style="list-style-type: none"> <li>(Omdat <math>Q</math> op deze middelloodlijn ligt, geldt) <math>PQ = BQ</math></li> </ul>	1
	<ul style="list-style-type: none"> <li><math>PQ = \frac{1}{p} - p</math> en <math>AQ = \frac{1}{p} - 1</math></li> </ul>	1
	<ul style="list-style-type: none"> <li><math>BQ = \sqrt{\left(\frac{1}{p} - 1\right)^2 + 1}</math></li> </ul>	1
	<ul style="list-style-type: none"> <li>Beschrijven hoe de vergelijking <math>\frac{1}{p} - p = \sqrt{\left(\frac{1}{p} - 1\right)^2 + 1}</math> kan worden opgelost</li> </ul>	1
	<ul style="list-style-type: none"> <li><math>p \approx 0,54</math> (want <math>0 &lt; p &lt; 1</math>)</li> </ul>	1
	of	
	<ul style="list-style-type: none"> <li>De coördinaten van <math>M</math> zijn <math>\left(\frac{1}{2}p + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)</math></li> </ul>	1
	<ul style="list-style-type: none"> <li><math>PM^2 = \left(\frac{1}{2}p + \frac{1}{2} - p\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2</math></li> </ul>	1
	<ul style="list-style-type: none"> <li><math>QM^2 = \left(\frac{1}{2}p + \frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2</math></li> </ul>	1
	<ul style="list-style-type: none"> <li><math>PQ^2 = \left(\frac{1}{p} - p\right)^2</math></li> </ul>	1
	<ul style="list-style-type: none"> <li>De vergelijking <math>\left(\frac{1}{2}p + \frac{1}{2} - p\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}p + \frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{p} - p\right)^2</math> moet worden opgelost</li> </ul>	1
	<ul style="list-style-type: none"> <li>Beschrijven hoe deze vergelijking kan worden opgelost</li> </ul>	1
	<ul style="list-style-type: none"> <li><math>p \approx 0,54</math> (want <math>0 &lt; p &lt; 1</math>)</li> </ul>	1
	of	
	<ul style="list-style-type: none"> <li>De coördinaten van <math>M</math> zijn <math>\left(\frac{1}{2}p + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)</math></li> </ul>	1
	<ul style="list-style-type: none"> <li><math>\overrightarrow{PB} = \begin{pmatrix} 1-p \\ 1 \end{pmatrix}</math></li> </ul>	1
	<ul style="list-style-type: none"> <li>Een vergelijking van een normaalvector van <math>\overrightarrow{PB}</math> is <math>(1-p)x + y = c</math></li> </ul>	1
	<ul style="list-style-type: none"> <li>Invullen van <math>Q\left(\frac{1}{p}, 0\right)</math> geeft voor de normaalvector door <math>Q</math> dat <math>(1-p) \cdot \frac{1}{p} = c</math></li> </ul>	1
	<ul style="list-style-type: none"> <li>De normaalvector moet door <math>M</math> gaan, dus er moet gelden <math>(1-p) \cdot \left(\frac{1}{2}p + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} = (1-p) \cdot \frac{1}{p}</math> (en deze vergelijking moet worden opgelost)</li> </ul>	1
	<ul style="list-style-type: none"> <li>Beschrijven hoe deze vergelijking kan worden opgelost</li> </ul>	1
	<ul style="list-style-type: none"> <li><math>p \approx 0,54</math> (want <math>0 &lt; p &lt; 1</math>)</li> </ul>	1
	of	

Vraag	Antwoord	Scores
	• Er moet gelden $PQ \cdot AB = PB \cdot QM$	1
	• $PQ = \frac{1}{p} - p$ (en $AB = 1$ )	1
	• $PB = \sqrt{(1-p)^2 + 1}$	1
	• $QM = \sqrt{\left(\frac{1}{2}p + \frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2}$	1
	• De vergelijking $\left(\frac{1}{p} - p\right) \cdot 1 = \sqrt{(1-p)^2 + 1} \cdot \sqrt{\left(\frac{1}{2}p + \frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2}$ moet worden opgelost	1
	• Beschrijven hoe deze vergelijking kan worden opgelost	1
	• $p \approx 0,54$ (want $0 < p < 1$ )	1

*Opmerking*

*In het derde antwoordalternatief mogen voor het eerste antwoordelement uitsluitend 0 of 2 scorepunten worden toegekend.*