

## Formules

---

### Goniometrie

$$\sin(t + u) = \sin(t)\cos(u) + \cos(t)\sin(u)$$

$$\sin(t - u) = \sin(t)\cos(u) - \cos(t)\sin(u)$$

$$\cos(t + u) = \cos(t)\cos(u) - \sin(t)\sin(u)$$

$$\cos(t - u) = \cos(t)\cos(u) + \sin(t)\sin(u)$$

$$\sin(2t) = 2\sin(t)\cos(t)$$

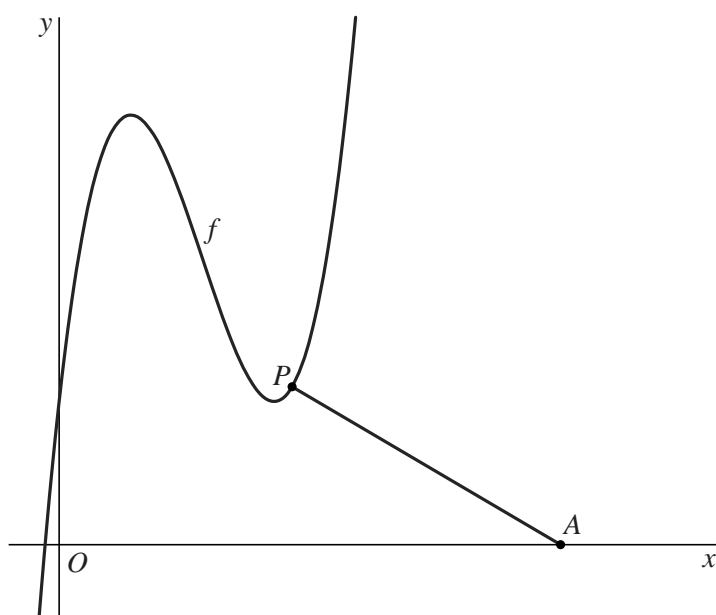
$$\cos(2t) = \cos^2(t) - \sin^2(t) = 2\cos^2(t) - 1 = 1 - 2\sin^2(t)$$

## Minimale lengte

De functie  $f$  wordt gegeven door  $f(x) = x(x-3)^2 + 2$ . Op de grafiek van  $f$  ligt het punt  $P$ . Verder is gegeven het punt  $A(7, 0)$ . Zie de figuur.

De lengte van lijnstuk  $AP$  hangt af van de positie van  $P$ . In de figuur is  $P$  zó gekozen dat de lengte van lijnstuk  $AP$  minimaal is.

figuur



- 4p 1 Bereken deze minimale lengte. Geef je eindantwoord in twee decimalen.

**Bewegend punt**

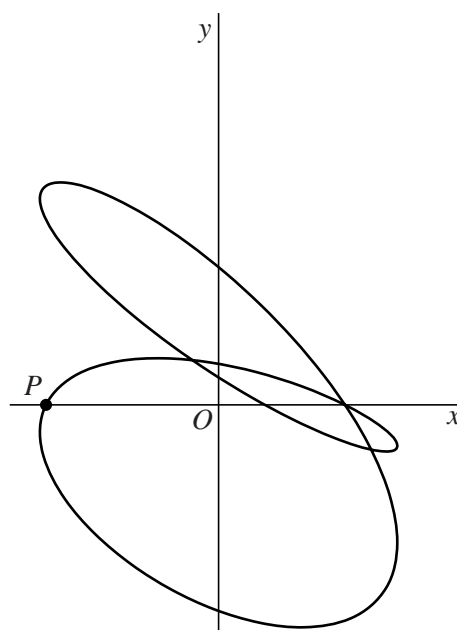
De beweging van een punt  $P$  wordt beschreven door de volgende bewegingsvergelijkingen:

$$\begin{cases} x(t) = \cos(2t) - \sin(2t) \\ y(t) = \sin(2t) - \sin(t) \end{cases} \quad \text{met } 0 \leq t \leq 2\pi$$

Op verschillende tijdstippen bevindt  $P$  zich op de  $x$ -as. Op een van die tijdstippen bevindt  $P$  zich links van de  $y$ -as. Zie figuur 1, waarin de positie van  $P$  op dit tijdstip is aangegeven.

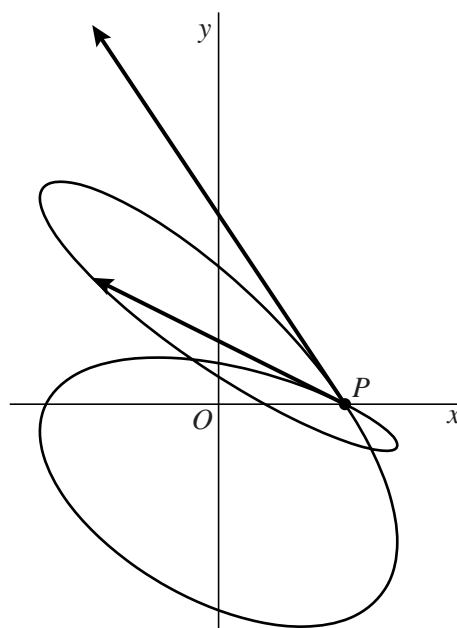
- 4p **2** Bereken exact de  $x$ -coördinaat van  $P$  op dit tijdstip.

**figuur 1**



Op de tijdstippen  $t = 0$  en  $t = \pi$  bevindt  $P$  zich in hetzelfde punt. Dit punt is met een stip aangegeven in figuur 2. Ook zijn de snelheidsvector van  $P$  op tijdstip  $t = 0$  en de snelheidsvector van  $P$  op tijdstip  $t = \pi$  aangegeven.

**figuur 2**



- 6p **3** Bereken algebraïsch de hoek in graden tussen deze twee snelheidsvectoren. Geef je eindantwoord in één decimaal.

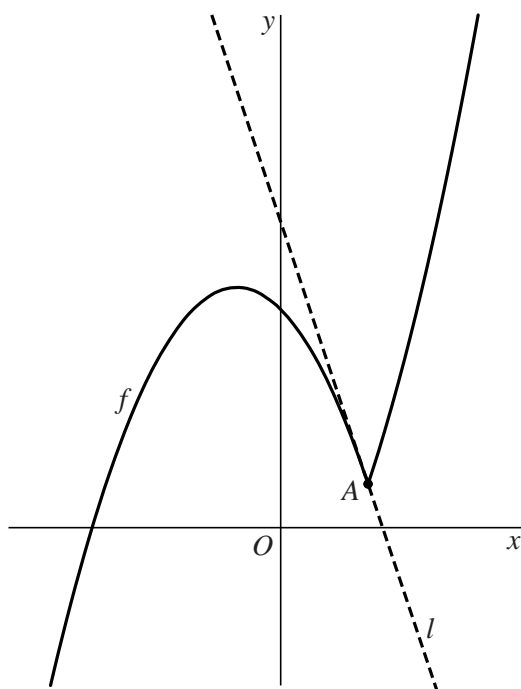
## Raaklijn in knikpunt

De functie  $f$  wordt gegeven door:

$$f(x) = |x - 2| \cdot \left(\frac{1}{2}x + 2\right) + 1$$

De grafiek van  $f$  heeft een knik in het punt  $A$ . Dit punt verdeelt de grafiek in twee delen. De lijn  $l$  is de raaklijn in  $A$  aan het linkerdeel van de grafiek. Zie de figuur.

figuur



5p 4 Stel op exacte wijze een vergelijking van lijn  $l$  op.

## Optimale snijsnelheid

In de metaalindustrie worden met een boormachine gaten in harde materialen geboord. Zie de foto.

**foto**



De levensduur van een boor is afhankelijk van de **(snij)snelheid**: dit is de snelheid waarmee de buitenkant van de boor door het metaal snijdt. Bij een hoge snelheid zal de boor snel slijten waardoor de levensduur kort is.

Rond 1900 stelde F.W. Taylor het volgende verband vast:

$$V \cdot T^m = C$$

Hierin is:

- $V$  de (snij)snelheid van de boor (in meter per minuut (m/min)) ( $V$  ligt vaak tussen de 5 en 150 m/min),
- $T$  de levensduur (in minuten),
- $m$  een constante die afhangt van het materiaal waarvan de boor is gemaakt,
- $C$  een constante die afhangt van het materiaal waarin wordt geboord.

De waarden van  $m$  en  $C$  worden experimenteel bepaald.

De resultaten van een meting in een bepaalde situatie zijn:

- Bij een snelheid van 20 m/min is de levensduur 116 minuten.
- Bij een snelheid van 30 m/min is de levensduur 40 minuten.

4p 5 Bereken algebraïsch de waarden van  $m$  en  $C$  in deze situatie. Geef  $m$  in twee decimalen en  $C$  als geheel getal.

In een fabriek boort één boormachine 24 uur per dag dezelfde soort gaten. Het is belangrijk de snelheid van de boor goed in te stellen: een hoge snelheid betekent dat het boren van een gat minder tijd kost. Maar daar staat tegenover dat de boor sneller vervangen moet worden. Men wil berekenen bij welke snelheid  $V$  het aantal geboorde gaten  $A$  per 24 uur maximaal is.

Om  $A$  uit te kunnen drukken in  $V$  doen we de volgende aannames:

- a Het aantal gaten  $N$  dat in één minuut geboord kan worden, is recht evenredig met de snelheid  $V$  van de boor. Bij een snelheid van 20 m/min boort deze boor 6 gaten in één minuut.
- b Met behulp van de formule van Taylor is te berekenen na hoeveel minuten boren de boor vervangen moet worden. Voor het boorproces in deze fabriek geldt  $C = 150$  en  $m = 0,25$ , dus  $V \cdot T^{0,25} = 150$ .
- c Het vervangen van een boor kost telkens 2 minuten. De boormachine is dus maar een deel van de tijd bezig met boren.

Voor dit deel  $d$  geldt:  $d = \frac{T}{T+2}$

- d Voor het aantal geboorde gaten  $A$  per 24 uur geldt:  $A = 1440 \cdot N \cdot d$

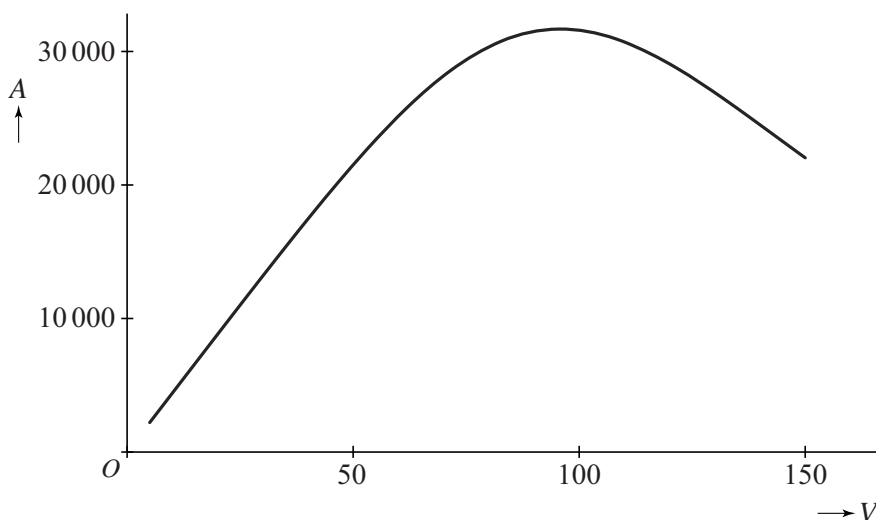
Met de aannames a, b, c en d kun je voor  $A$  de volgende formule opstellen:

$$A = \frac{432V}{\frac{2}{150^4} \cdot V^4 + 1}$$

- 5p **6** Leid deze formule voor  $A$  af uit de aannames a, b, c en d.

In de figuur is de grafiek van  $A$  weergegeven voor  $5 \leq V \leq 150$ .

**figuur**



Uit de grafiek blijkt dat er een snelheid is waarbij het aantal geboorde gaten per 24 uur maximaal is.

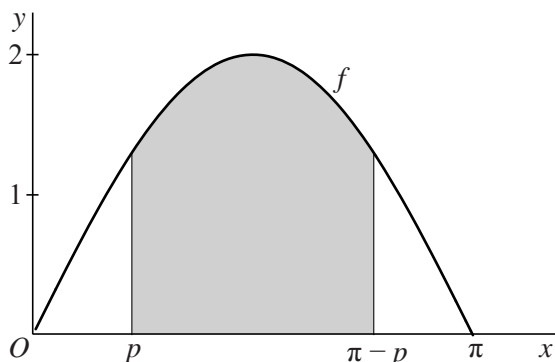
- 5p **7** Bereken algebraïsch deze snelheid in m/min. Geef je eindantwoord in één decimaal.

### Oppervlakte onder een sinusgrafiek

De functie  $f$  met domein  $[0, \pi]$  wordt gegeven door  $f(x) = 2\sin(x)$ .

We bekijken het gebied dat begrensd wordt door de grafiek van  $f$ , de  $x$ -as, de lijn met vergelijking  $x = p$  en de lijn met vergelijking  $x = \pi - p$ . Hierin is  $0 < p < \frac{1}{2}\pi$ . In figuur 1 is dit gebied grijs. De oppervlakte van het gebied is  $A(p)$ .

figuur 1

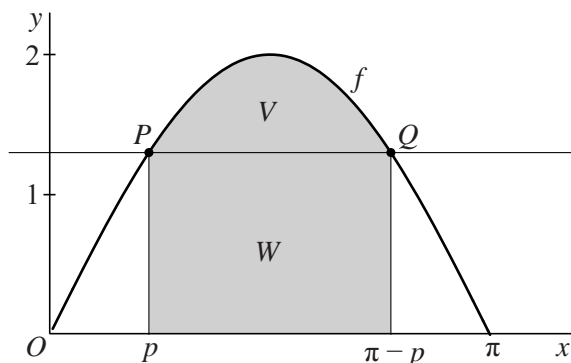


Er geldt:  $A(p) = 4\cos(p)$ .

4p 8 Bewijs dat deze formule voor  $A(p)$  juist is.

De lijn met vergelijking  $x = p$  snijdt de grafiek van  $f$  in het punt  $P$ .  
 De lijn met vergelijking  $x = \pi - p$  snijdt de grafiek van  $f$  in het punt  $Q$ .  
 De horizontale lijn door  $P$  en  $Q$  verdeelt het grijze gebied in twee delen.  
 Het deel boven deze lijn is  $V$ , het deel onder deze lijn is  $W$ . Zie figuur 2.

figuur 2



Er is één waarde van  $p$  waarvoor de oppervlakten van  $V$  en  $W$  aan elkaar gelijk zijn.

4p 9 Bereken deze waarde van  $p$ . Geef je eindantwoord in twee decimalen.

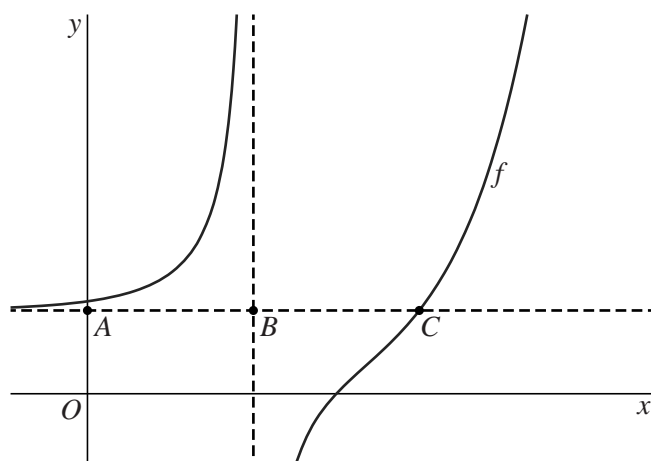
## Horizontale en verticale asymptoot

De functie  $f$  wordt gegeven door:

$$f(x) = \frac{e^{2x} - 1000}{e^x - 10}$$

De grafiek van  $f$  heeft een horizontale asymptoot en een verticale asymptoot. In de figuur is de grafiek van  $f$  met de beide asymptoten weergegeven. De twee asymptoten snijden elkaar in het punt  $B$ . Het punt  $A$  is het snijpunt van de horizontale asymptoot en de  $y$ -as. Het punt  $C$  is het snijpunt van de horizontale asymptoot en de grafiek van  $f$ .

**figuur**



7p 10 Bewijs dat  $B$  het midden is van lijnstuk  $AC$ .



## Wind aan zee

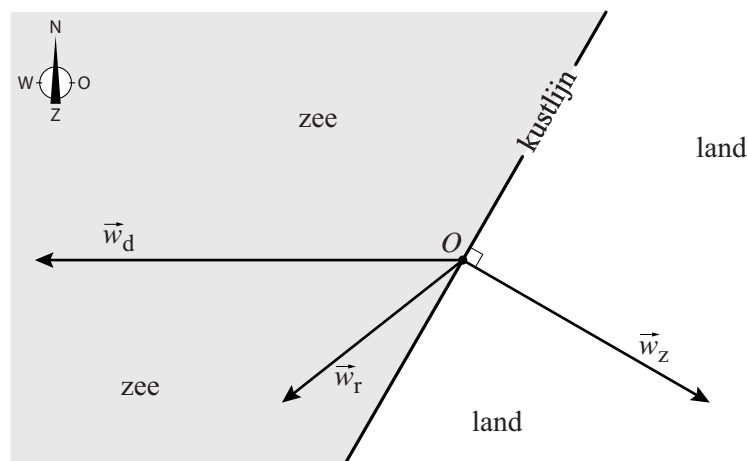
Wind heeft een richting en een snelheid. Daarom kan wind als een vector worden weergegeven. In de figuren bij deze opgave wordt een wind met een snelheid van 1 m/s weergegeven als een vector van 1 cm.

Op een warme zomerdag worden aan de kust de windrichting en de windsnelheid door twee processen bepaald:

- de luchtstroming van een gebied met hoge luchtdruk naar een gebied met lage luchtdruk: dit is wind  $\vec{w}_d$ .
- de luchtstroming die ontstaat doordat de temperatuur boven zee anders is dan boven land: dit is wind  $\vec{w}_z$ . We gaan er in deze opgave van uit dat deze wind loodrecht op de kustlijn staat en richting het land waait.

In figuur 1 is een voorbeeldsituatie getekend waarbij wind  $\vec{w}_d$  in westelijke richting waait.

figuur 1



De resulterende wind  $\vec{w}_r$  is de wind zoals die wordt ervaren door iemand die zich aan de kust in punt  $O$  bevindt. Er geldt:  $\vec{w}_r = \vec{w}_z + \vec{w}_d$ .

Op de uitwerkbijlage is een deel van een kust getekend. Er geldt:

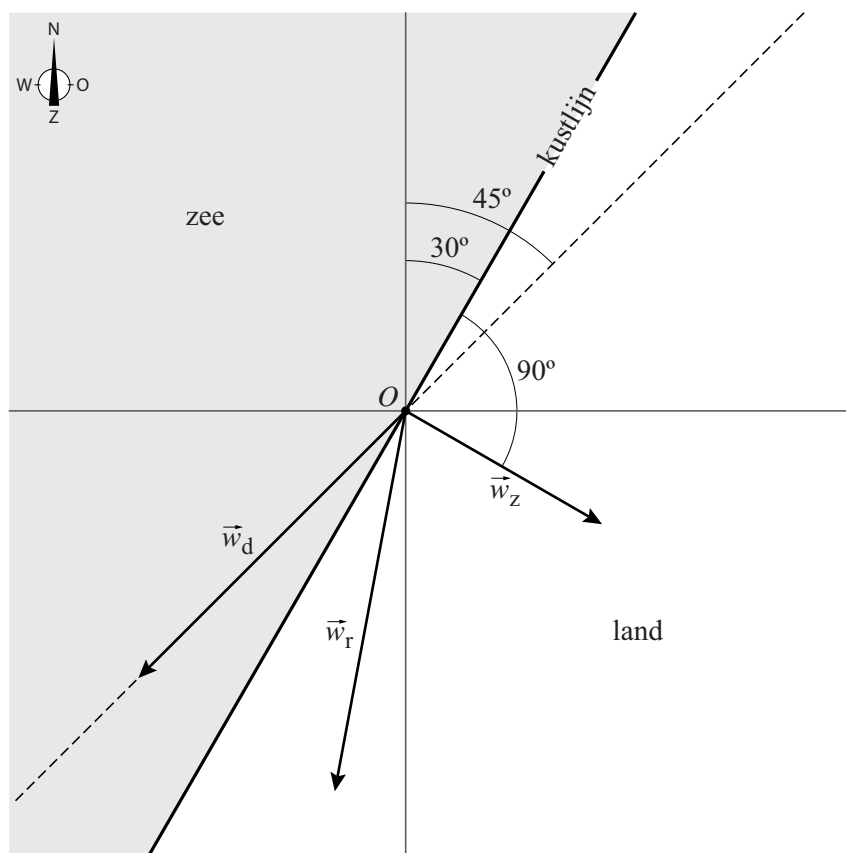
- De wind  $\vec{w}_z$  waait met een snelheid van 4 m/s landinwaarts.
- De wind  $\vec{w}_d$  waait met een snelheid van 6 m/s.
- De resulterende wind  $\vec{w}_r$  waait evenwijdig met de kustlijn.

Op basis van bovenstaande drie gegevens zijn er twee mogelijkheden voor  $\vec{w}_d$ .

- 4p 11 Teken op de uitwerkbijlage deze twee vectoren  $\vec{w}_d$ . Neem daarbij punt  $O$  als beginpunt van  $\vec{w}_d$ . Licht je aanpak toe.

Op een plek langs de Nederlandse kust (in figuur 2 het punt  $O$ ) maakt de kustlijn een hoek van  $30^\circ$  met het noorden. Op zekere dag waait de wind  $\vec{w}_d$  met een snelheid van 5 m/s in zuidwestelijke richting. De wind  $\vec{w}_z$  heeft een snelheid van 3 m/s en staat loodrecht op de kustlijn. In figuur 2 zijn de lijn noord-zuid en de lijn oost-west de assen van het assenstelsel. De lijn door  $O$  waar vector  $\vec{w}_d$  op ligt, is gestippeld getekend; die maakt dus een hoek van  $45^\circ$  met het noorden. Figuur 2 staat ook op de uitwerkbijlage.

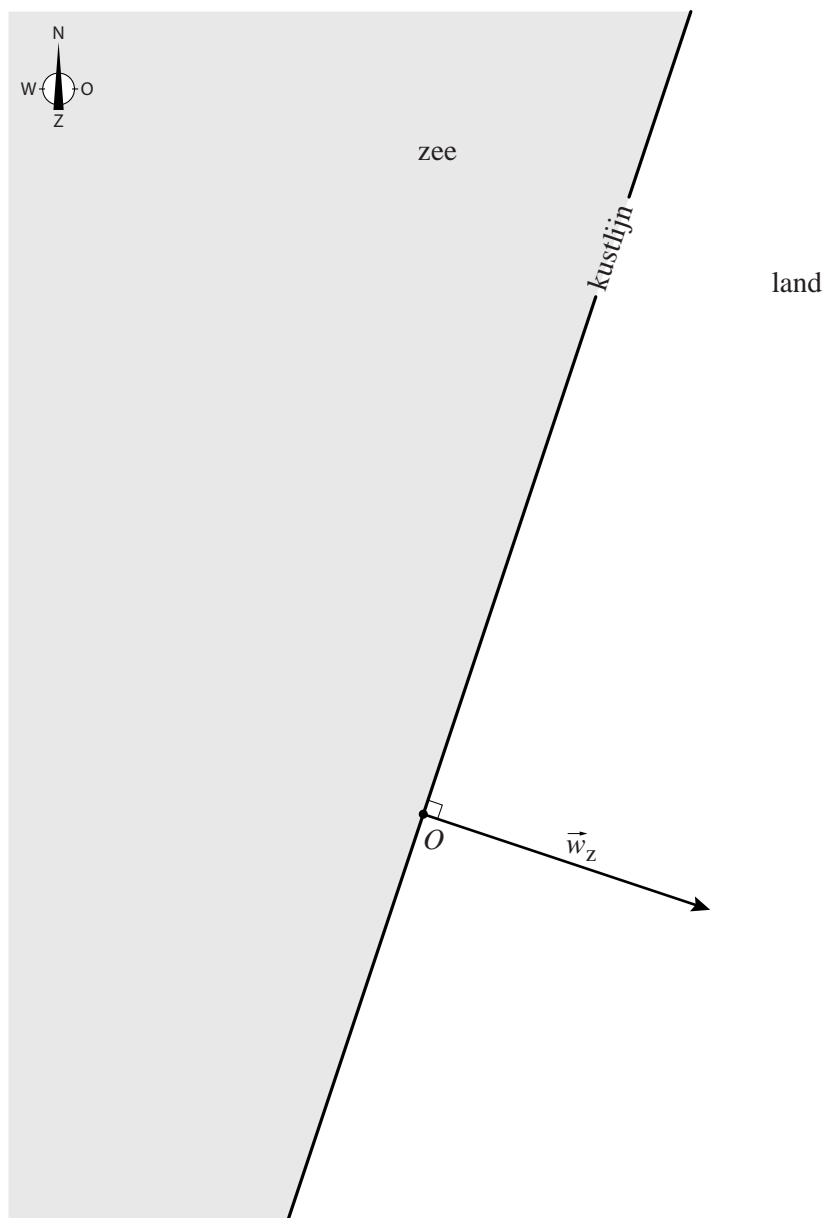
figuur 2



- 5p 12 Bereken algebraïsch de snelheid in m/s van de resulterende wind. Geef je eindantwoord in één decimaal. Je kunt bij deze vraag de uitwerkbijlage gebruiken.

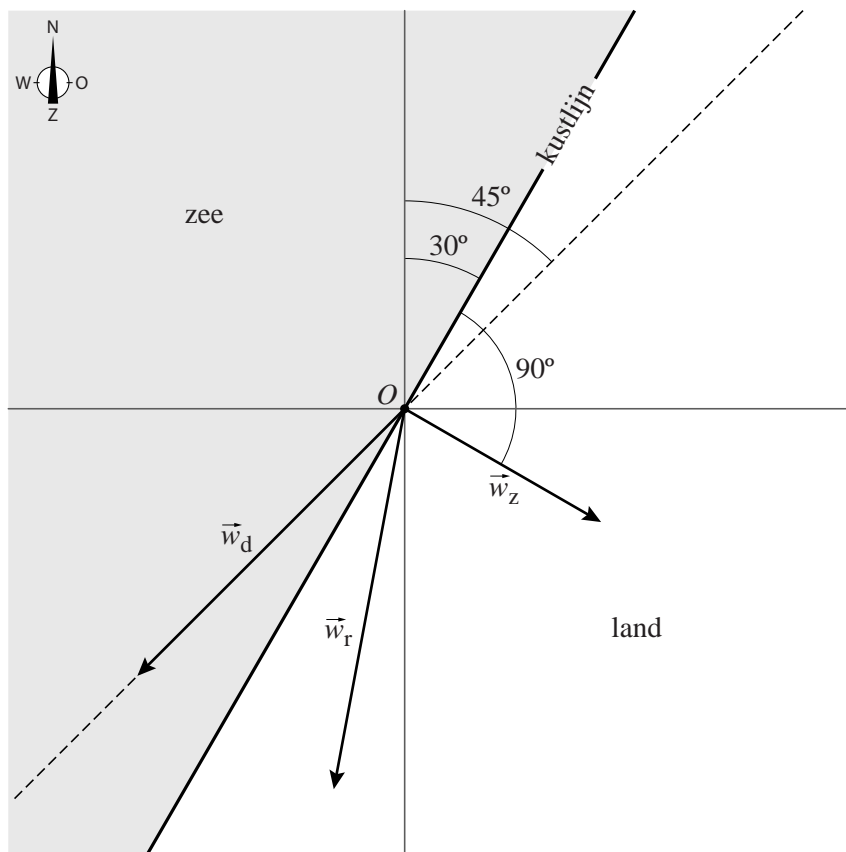
uitwerkbijlage

11



uitwerkbijlage

12



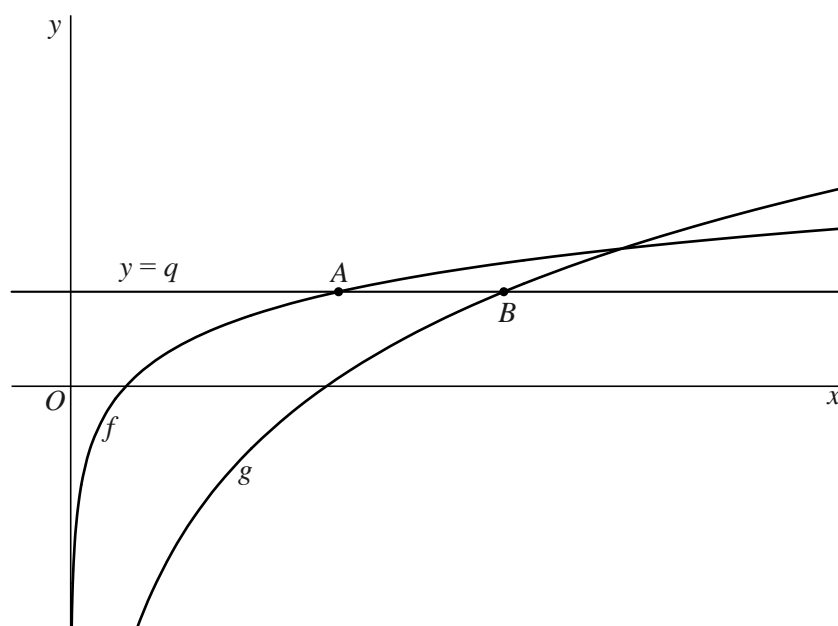
## Twee logaritmische functies

De functies  $f$  en  $g$  worden gegeven door:

$$f(x) = \log(\sqrt{x}) \quad \text{en} \quad g(x) = \log(x\sqrt{x}) - 1$$

De lijn met vergelijking  $y = q$  snijdt de grafiek van  $f$  in het punt  $A$  en de grafiek van  $g$  in het punt  $B$ . Zie figuur 1.

figuur 1

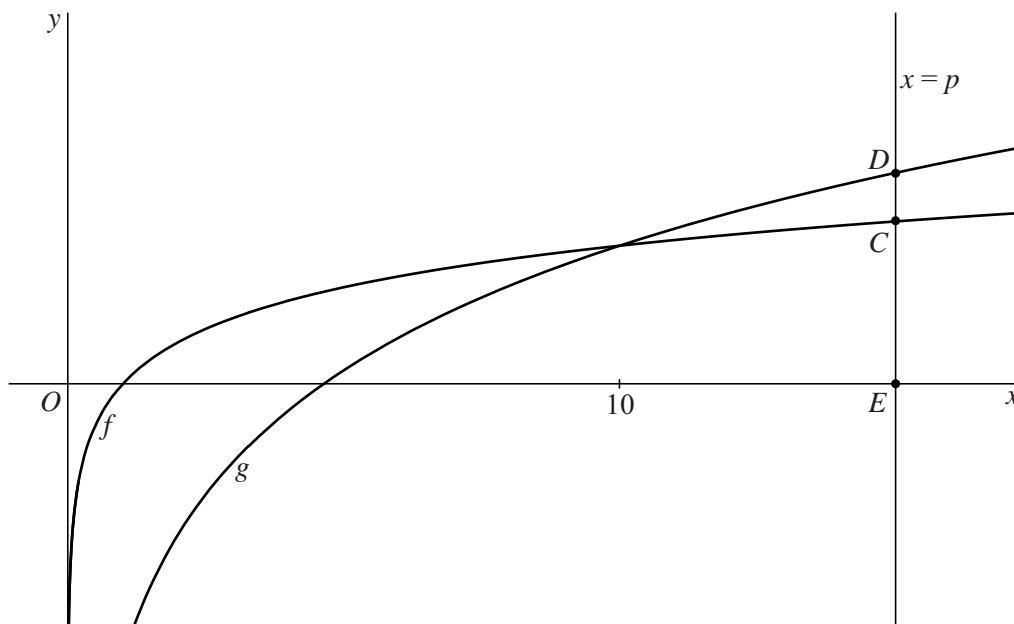


Er zijn waarden van  $q$  waarvoor  $A$  links van  $B$  ligt en de lengte van lijnstuk  $AB$  gelijk is aan 3.

- 4p 13 Bereken deze waarden van  $q$ . Geef je eindantwoorden in twee decimalen.

Het snijpunt van de twee grafieken ligt bij  $x = 10$ .  
 Gegeven is  $p > 10$ . De lijn met vergelijking  $x = p$  ligt dan rechts van het snijpunt van de twee grafieken.  
 De lijn met vergelijking  $x = p$  snijdt de grafiek van  $f$  in het punt  $C$ , de grafiek van  $g$  in het punt  $D$  en de  $x$ -as in het punt  $E$ .  
 Doordat  $p > 10$ , ligt  $D$  boven  $C$ . Zie figuur 2.

**figuur 2**



De verhouding tussen de lengte van lijnstuk  $CD$  en de lengte van lijnstuk  $CE$  hangt af van  $p$ . Er geldt:

$$\frac{CD}{CE} = \frac{2\log(p) - 2}{\log(p)}$$

3p 14 Bewijs dat deze formule voor  $\frac{CD}{CE}$  juist is.

Als  $p$  onbegrensd toeneemt, nadert de verhouding  $\frac{CD}{CE}$  tot een grenswaarde.

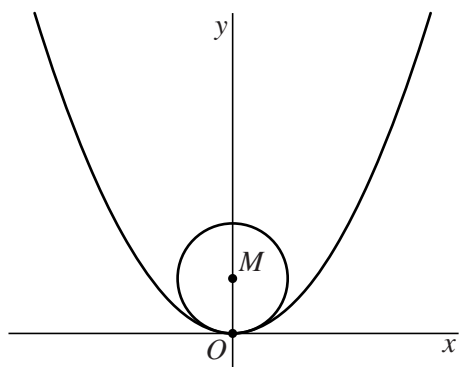
2p 15 Bereken exact deze grenswaarde.

**Parabool en cirkel met variabele straal**

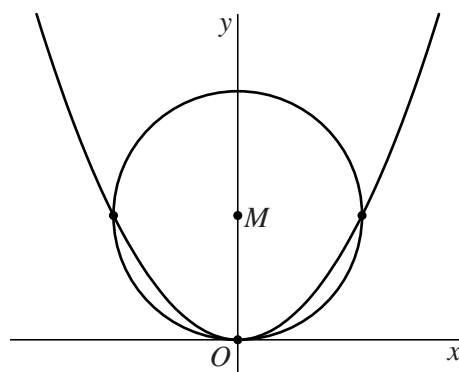
Gegeven is de parabool met vergelijking  $y = x^2$  en een punt  $M(0, r)$  op de positieve  $y$ -as. We bekijken de cirkel met middelpunt  $M$  en straal  $r$ . Het punt  $O(0, 0)$  ligt op deze cirkel en op de gegeven parabool.

Afhankelijk van de waarde van  $r$  hebben de cirkel en de parabool één gemeenschappelijk punt of drie gemeenschappelijke punten. In figuur 1 is de situatie met  $r = \frac{9}{20}$  getekend, waarbij er één gemeenschappelijk punt is. In figuur 2 is de situatie met  $r = 1$  getekend, met drie gemeenschappelijke punten.

**figuur 1**  $r = \frac{9}{20}$



**figuur 2**  $r = 1$



- 5p **16** Bereken exact voor welke waarden van  $r$  de cirkel en de parabool drie gemeenschappelijke punten hebben.

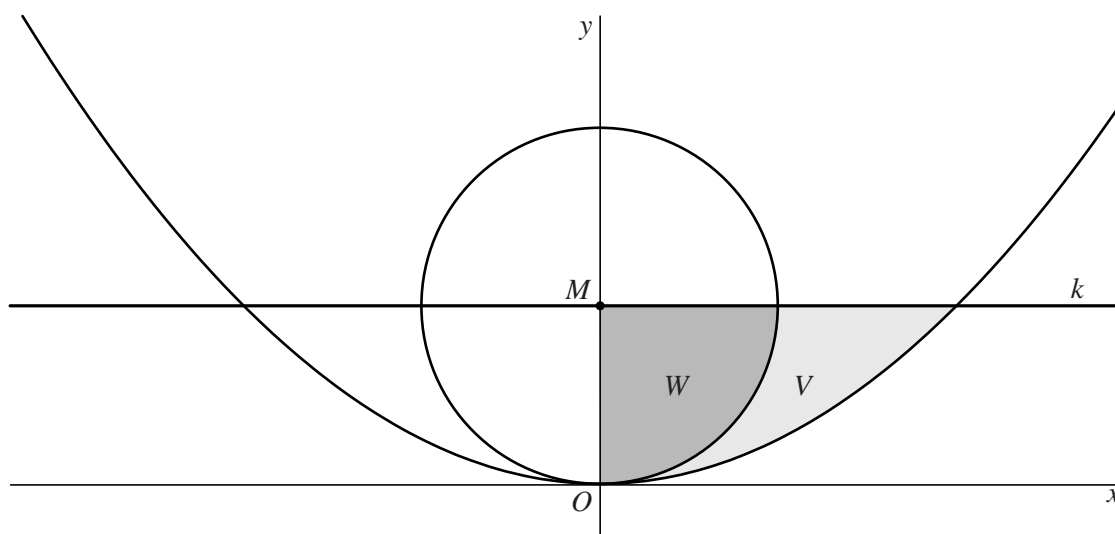
In de rest van deze opgave gaan we uit van de situatie waarin de cirkel en de parabool alleen punt  $O$  gemeenschappelijk hebben.

De lijn  $k$  gaat door  $M$  en is evenwijdig aan de  $x$ -as.

$V$  is het gebied rechts van de  $y$ -as dat wordt ingesloten door de cirkel, de parabool en lijn  $k$ . In figuur 3 is dit gebied lichtgrijs gemaakt.

$W$  is het gebied rechts van de  $y$ -as dat wordt ingesloten door de cirkel, de  $y$ -as en lijn  $k$ . In figuur 3 is dit gebied donkergrijs gemaakt.

**figuur 3**



Wanneer de cirkel wordt gewenteld om de  $y$ -as, ontstaat een bol met inhoud  $\frac{4}{3}\pi r^3$ .

De gebieden  $V$  en  $W$  worden gewenteld om de  $y$ -as.

Er is een waarde van  $r$  waarvoor de inhoud van de omwentelingslichamen van  $V$  en  $W$  aan elkaar gelijk zijn.

5p 17 Bereken exact deze waarde van  $r$ .