

Vraag	Antwoord	Scores
-------	----------	--------

Minimale lengte

1 maximumscore 4

- $\Delta x = 7 - p$ en $\Delta y = f(p)$, waarbij p de x -coördinaat van P is 1
- $AP = \sqrt{(7-p)^2 + (f(p))^2}$ (of $AP^2 = (7-p)^2 + (f(p))^2$) 1
- Beschrijven hoe het minimum hiervan (met de GR) bepaald kan worden 1
- De minimale lengte van AP is 4,35 1

Bewegend punt

2 maximumscore 4

- $y = 0$ geeft $\sin(2t) = \sin(t)$ 1
- Hieruit volgt $2t = t + k \cdot 2\pi$ (met k geheel) of $2t = \pi - t + k \cdot 2\pi$ (met k geheel) 1
- Dit geeft $t = 0$, $t = \frac{1}{3}\pi$, $t = \pi$, $t = 1\frac{2}{3}\pi$ en $t = 2\pi$ 1
- $x\left(\frac{1}{3}\pi\right) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}$ 1

of

- $y(t) = 2 \sin(t) \cos(t) - \sin(t)$ 1
- $y = 0$ geeft $\sin(t) = 0$ of $\cos(t) = \frac{1}{2}$ 1
- Dit geeft $t = 0$, $t = \frac{1}{3}\pi$, $t = \pi$, $t = 1\frac{2}{3}\pi$ en $t = 2\pi$ 1
- $x\left(\frac{1}{3}\pi\right) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}$ 1

Vraag	Antwoord	Scores
-------	----------	--------

3 maximumscore 6

- De afgeleide van $\sin(2t)$ is $2\cos(2t)$ 1
 - De afgeleide van $\cos(2t)$ is $-2\sin(2t)$ 1
 - ($x'(t) = -2\sin(2t) - 2\cos(2t)$ en $y'(t) = 2\cos(2t) - \cos(t)$, dus)
 - $\begin{pmatrix} x'(0) \\ y'(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} x'(\pi) \\ y'(\pi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ 1
 - $\cos(\varphi) = \frac{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}}{\left| \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} \right|}$ (waarbij φ de gevraagde hoek is) 1
 - $\cos(\varphi) = \frac{7}{\sqrt{65}}$ 1
 - $\varphi \approx 29,7(^{\circ})$ 1
- of
- De afgeleide van $\sin(2t)$ is $2\cos(2t)$ 1
 - De afgeleide van $\cos(2t)$ is $-2\sin(2t)$ 1
 - ($x'(t) = -2\sin(2t) - 2\cos(2t)$ en $y'(t) = 2\cos(2t) - \cos(t)$, dus)
 - $\frac{dy}{dx} = \frac{2\cos(2t) - \cos(t)}{-2\sin(2t) - 2\cos(2t)}$ 1
 - $t = 0$ en $t = \pi$ invullen geeft de richtingscoëfficiënten van de raaklijnen aan de baan: $-\frac{1}{2}$ en $-\frac{3}{2}$ 1
 - De richtingshoeken zijn $-26,56\dots^{\circ}$ en $-56,30\dots^{\circ}$ (of: de hoeken die de raaklijnen met de x -as maken, zijn $26,56\dots^{\circ}$ en $56,30\dots^{\circ}$) 1
 - De gevraagde hoek is $(-56,30\dots^{\circ} - -26,56\dots^{\circ}) \approx 29,7(^{\circ})$ 1

Vraag	Antwoord	Scores
-------	----------	--------

Raaklijn in knikpunt

4 maximumscore 5

- Voor de x -coördinaat van de knik geldt $x - 2 = 0$, dus $x = 2$ 1
- Voor $x < 2$ geldt $f(x) = -(x - 2) \cdot \left(\frac{1}{2}x + 2\right) + 1$ 1
- (Voor $x < 2$ geldt) $f'(x) = -1 \cdot \left(\frac{1}{2}x + 2\right) - (x - 2) \cdot \frac{1}{2}$ 1
- De helling van l is $\left(\lim_{x \uparrow 2} f'(x) = \right) -3$ 1
- ($y_A = 1$;) uit $1 = -3 \cdot 2 + b$ volgt $b = 7$, dus een vergelijking van l is $y = -3x + 7$ 1

Opmerkingen

- Als de kandidaat het functievoorschrift $f(x) = (x - 2) \cdot \left(\frac{1}{2}x + 2\right) + 1$ hanteert, voor deze vraag maximaal 3 scorepunten toekennen.
- Voor de notatie $f'(2) = -3$ in plaats van $\lim_{x \uparrow 2} f'(x) = -3$ geen scorepunten in mindering brengen.

Vraag	Antwoord	Scores
-------	----------	--------

Optimale snijsnelheid

5 maximumscore 4

- De vergelijking $20 \cdot 116^m = 30 \cdot 40^m$ 1
- Herleiden tot $2,9^m = 1,5$ 1
- Dit geeft $m = {}^{2,9}\log(1,5) = 0,380\dots$, dus $m \approx 0,38$ 1
- $C = 20 \cdot 116^{0,380\dots}$ geeft $C \approx 122$ 1

6 maximumscore 5

- $N = 0,3V$ 1
- Uit $V \cdot T^{0,25} = 150$ volgt $T = \left(\frac{150}{V}\right)^4$ 1
- $d = \frac{T}{T+2} = \frac{\left(\frac{150}{V}\right)^4}{\left(\frac{150}{V}\right)^4 + 2} = \frac{\frac{150^4}{V^4}}{\frac{150^4}{V^4} + 2} = \frac{150^4}{150^4 + 2V^4}$ 1
- Dit is gelijk aan $\frac{1}{\frac{2}{150^4} \cdot V^4 + 1}$ 1
- Dus $A = 1440 \cdot 0,3V \cdot d = 432V \cdot d = \frac{432V}{\frac{2}{150^4} \cdot V^4 + 1}$ 1

7 maximumscore 5

- De afgeleide van de noemer van de formule voor A is $\frac{8}{150^4} \cdot V^3$ (of $0,0000000158\dots \cdot V^3$) 1
- $\frac{dA}{dV} = \frac{432 \cdot (0,0000000395\dots \cdot V^4 + 1) - 432V \cdot 0,0000000158\dots \cdot V^3}{(0,0000000395\dots \cdot V^4 + 1)^2}$ 1
- $\frac{dA}{dV} = 0$ geeft $0,00000170\dots \cdot V^4 + 432 - 0,00000682\dots \cdot V^4 = 0$ 1
- Dus $-0,00000512 \cdot V^4 + 432 = 0$, dus $V^4 = \frac{-432}{-0,00000512}$ ($= 84\,375\,000$) 1
- Dit geeft $V (= \sqrt[4]{84\,375\,000}) \approx 95,8$ ($V \approx -95,8$ voldoet niet) (dus de gevraagde snelheid is $95,8$ (m/min)) 1

Vraag	Antwoord	Scores
-------	----------	--------

Oppervlakte onder een sinusgrafiek

8 maximumscore 4

- $A(p) = \int_p^{\pi-p} 2 \sin(x) dx$ 1
- Een primitieve van $2 \sin(x)$ is $-2 \cos(x)$ 1
- $A(p) = -2 \cos(\pi - p) + 2 \cos(p)$ 1
- $-\cos(\pi - p) = \cos(p)$, dus $A(p) = 4 \cos(p)$ 1

of

- $A(p) = 2 \cdot \int_p^{\frac{1}{2}\pi} 2 \sin(x) dx$ (vanwege de symmetrie van f) 2
- Een primitieve van $2 \sin(x)$ is $-2 \cos(x)$ 1
- $A(p) = 2 \cdot \left(-2 \cos\left(\frac{1}{2}\pi\right) + 2 \cos(p)\right)$, dus $A(p) = 4 \cos(p)$ 1

Opmerking

Voor het eerste antwoordelement van het tweede antwoordalternatief mogen uitsluitend 0 of 2 scorepunten worden toegekend.

9 maximumscore 4

- De oppervlakte van W is gelijk aan $(\pi - 2p) \cdot 2 \sin(p)$ 1
- De oppervlakte van W moet gelijk zijn aan $\frac{1}{2} A(p)$ 1
- Beschrijven hoe de vergelijking $(\pi - 2p) \cdot 2 \sin(p) = \frac{1}{2} \cdot 4 \cos(p)$ kan worden opgelost 1
- Dit geeft $p \approx 0,41$ ($p = \frac{1}{2}\pi$ voldoet niet) 1

of

- De oppervlakte van W is gelijk aan $(\pi - 2p) \cdot 2 \sin(p)$ 1
- De vergelijking $\int_p^{\pi-p} 2 \sin(x) dx = 2 \cdot (\pi - 2p) \cdot 2 \sin(p)$ moet worden opgelost 1
- Beschrijven hoe deze vergelijking kan worden opgelost 1
- Dit geeft $p \approx 0,41$ ($p = \frac{1}{2}\pi$ voldoet niet) 1

Vraag	Antwoord	Scores
-------	----------	--------

Horizontale en verticale asymptoot

10 maximumscore 7

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ en $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{2x} = 0$ 1
- De horizontale asymptoot heeft vergelijking $y = \left(\frac{0-1000}{0-10} =\right) 100$ 1
- ($e^x = 10$ geeft $x = \ln(10)$, dus) de verticale asymptoot heeft vergelijking $x = \ln(10)$ (en dit is x_B) 1
- $f(x) = 100$ geeft $e^{2x} - 1000 = 100e^x - 1000$ 1
- $e^{2x} = 100e^x$ geeft $e^x(e^x - 100) = 0$ 1
- Hieruit volgt $x_C = \ln(100)$ (want $e^x = 0$ heeft geen oplossingen) 1
- $x_C = 2\ln(10)$ (dus $x_C - x_A = 2\ln(10)$) (en $x_B - x_A = \ln(10)$) (en de y-coördinaten van A, B en C zijn gelijk) (dus B is het midden van lijnstuk AC) 1

of

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ en $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{2x} = 0$ 1
- De horizontale asymptoot heeft vergelijking $y = \left(\frac{0-1000}{0-10} =\right) 100$ 1
- ($e^x = 10$ geeft $x = \ln(10)$, dus) de verticale asymptoot heeft vergelijking $x = \ln(10)$ (en dit is x_B) 1
- $f(x) = 100$ geeft $e^{2x} - 1000 = 100e^x - 1000$ 1
- $e^{2x} = 100e^x$ geeft $e^x(e^x - 100) = 0$ 1
- Hieruit volgt $x_C = \ln(100)$ (want $e^x = 0$ heeft geen oplossingen) 1
- $x_C - x_B = \ln(100) - \ln(10) = \left(\ln\left(\frac{100}{10}\right) =\right) \ln(10)$ (en $x_B - x_A = \ln(10)$) (en de y-coördinaten van A, B en C zijn gelijk) (dus B is het midden van lijnstuk AC) 1

of

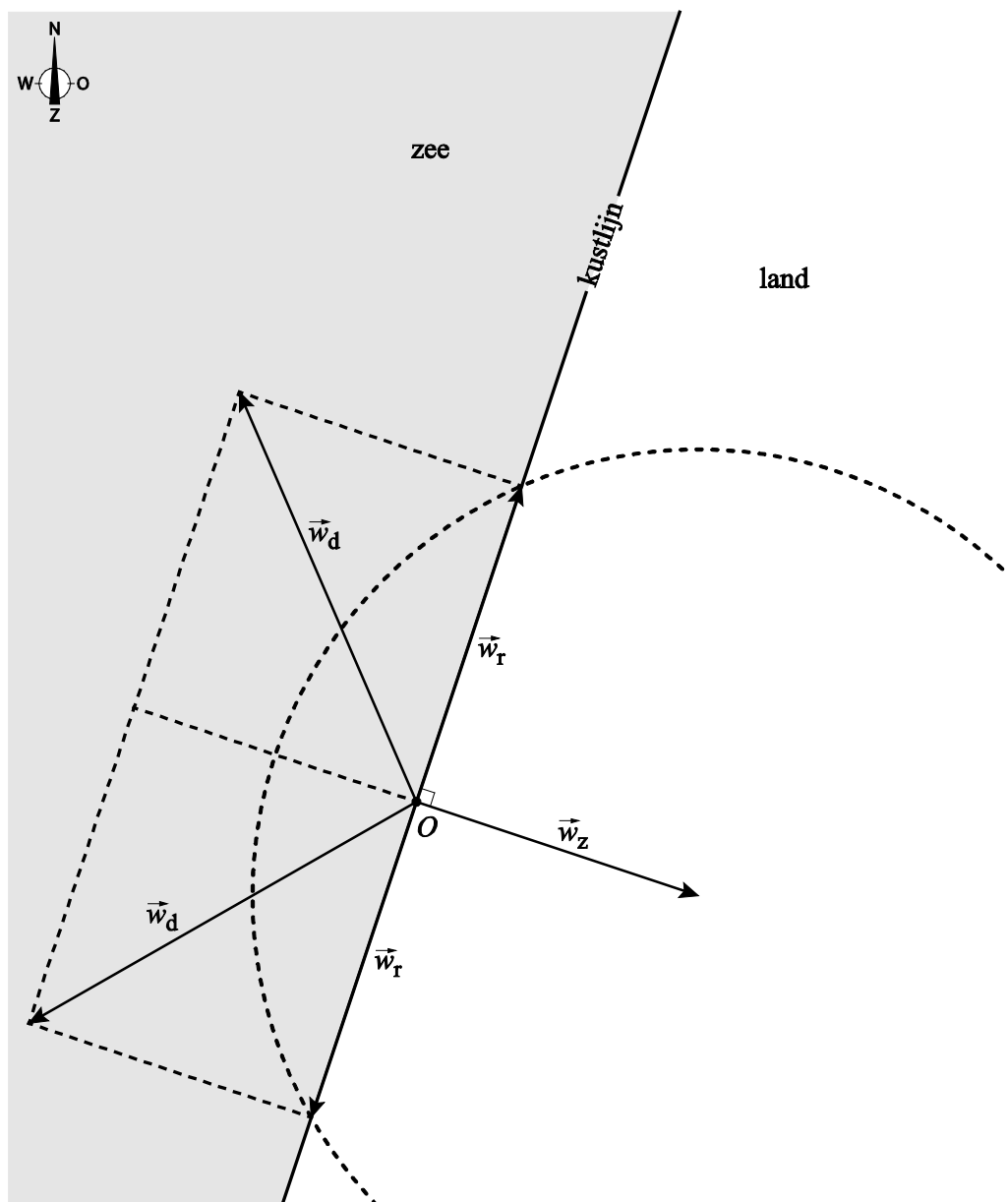
Vraag	Antwoord	Scores
	<ul style="list-style-type: none"> $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ en $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{2x} = 0$ 	1
	<ul style="list-style-type: none"> De horizontale asymptoot heeft vergelijking $y = \left(\frac{0-1000}{0-10} =\right) 100$ 	1
	<ul style="list-style-type: none"> $(e^x = 10$ geeft $x = \ln(10)$), dus de verticale asymptoot heeft vergelijking $x = \ln(10)$ (en dit is x_B) 	1
	<ul style="list-style-type: none"> $f(x) = 100$ geeft $e^{2x} - 1000 = 100e^x - 1000$ 	1
	<ul style="list-style-type: none"> $e^{2x} = 100e^x$ geeft $e^x(e^x - 100) = 0$ 	1
	<ul style="list-style-type: none"> Hieruit volgt $x_C = \ln(100)$ (want $e^x = 0$ heeft geen oplossingen) 	1
	<ul style="list-style-type: none"> $\left(\frac{x_A + x_C}{2} =\right) \frac{x_C}{2} = \frac{\ln(100)}{2} = \frac{2\ln(10)}{2} = \ln(10) = x_B$ (en de y-coördinaten van A, B en C zijn gelijk) (dus B is het midden van lijnstuk AC) 	1
	of	
	<ul style="list-style-type: none"> Als x onbegrensd afneemt, dan naderen e^x en e^{2x} naar 0 	1
	<ul style="list-style-type: none"> De horizontale asymptoot heeft vergelijking $y = \left(\frac{0-1000}{0-10} =\right) 100$ 	1
	<ul style="list-style-type: none"> $f(x) = 100$ geeft $e^{2x} - 1000 = 100e^x - 1000$ 	1
	<ul style="list-style-type: none"> $e^{2x} = 100e^x$ geeft $e^x(e^x - 100) = 0$ 	1
	<ul style="list-style-type: none"> Hieruit volgt $x_C = \ln(100)$ (want $e^x = 0$ heeft geen oplossingen) 	1
	<ul style="list-style-type: none"> Het midden van lijnstuk AC ligt bij $x = \frac{1}{2}\ln(100)$ 	1
	<ul style="list-style-type: none"> Voor $x = \frac{1}{2}\ln(100)$ is de noemer van $f(x)$ gelijk aan $e^{\frac{1}{2}\ln(100)} - 10 = e^{\ln(10)} - 10 = 0$, dus de verticale asymptoot gaat door het midden van AC (en de y-coördinaten van A, B en C zijn gelijk) (dus B is het midden van lijnstuk AC) 	1

Vraag	Antwoord	Scores
-------	----------	--------

Wind aan zee

11 maximumscore 4

- Teken een cirkel met straal 6 cm en met als middelpunt het eindpunt van \vec{w}_z (of bogen daarvan die de kustlijn snijden) 2
- Aangeven van de twee snijpunten van de cirkel met de kustlijn (de mogelijke eindpunten van vector \vec{w}_r) of tekenen van de twee mogelijke vectoren \vec{w}_r 1
- Teken $\vec{w}_r - \vec{w}_z$ voor beide situaties (en dat zijn de gevraagde vectoren \vec{w}_d) 1



of

Vraag	Antwoord	Scores
	<ul style="list-style-type: none"> • $\vec{w}_r ^2 + \vec{w}_z ^2 = \vec{w}_d ^2$ 	1
	<ul style="list-style-type: none"> • $\vec{w}_r = \sqrt{6^2 - 4^2} = 4,4\dots$ 	1
	<ul style="list-style-type: none"> • Aangeven van de twee punten op de kustlijn op afstand 4,4... cm van O (de mogelijke eindpunten van vector \vec{w}_r) of het tekenen van de twee mogelijke vectoren \vec{w}_r 	1
	<ul style="list-style-type: none"> • Teken van $\vec{w}_r - \vec{w}_z$ voor beide situaties (en dat zijn de gevraagde vectoren \vec{w}_d) 	1

Opmerkingen

- *Als het eindpunt van minstens één getekende vector \vec{w}_d meer dan 2 mm afwijkt van het juiste eindpunt van de betreffende vector \vec{w}_d , voor deze vraag maximaal 3 scorepunten toekennen.*
- *Als de kandidaat werkt volgens het eerste antwoordalternatief en daarbij de eindpunten van vector \vec{w}_r bepaalt zonder gebruik te maken van een cirkel, hiervoor geen scorepunten in mindering brengen.*
- *Als slechts één situatie is getekend, voor deze vraag maximaal 3 scorepunten toekennen.*
- *Voor het eerste antwoordelement van het eerste antwoordalternatief mogen uitsluitend 0 of 2 scorepunten worden toegekend.*

Vraag	Antwoord	Scores
-------	----------	--------

12 maximumscore 5

- Omdat \vec{w}_z loodrecht staat op de kustlijn, is de hoek van \vec{w}_z met de lijn oost-west ook 30° 1
 - $\vec{w}_z = \begin{pmatrix} 3\cos(30^\circ) \\ -3\sin(30^\circ) \end{pmatrix} (= \begin{pmatrix} 2,59... \\ -1,5 \end{pmatrix})$ 1
 - $\vec{w}_d = \begin{pmatrix} -5\cos(45^\circ) \\ -5\sin(45^\circ) \end{pmatrix} (= \begin{pmatrix} -3,53... \\ -3,53... \end{pmatrix})$ 1
 - Optellen geeft $\vec{w}_r = \begin{pmatrix} -0,93... \\ -5,03... \end{pmatrix}$ 1
 - Hieruit volgt $|\vec{w}_r| = \sqrt{(-0,93...)^2 + (-5,03...)^2} \approx 5,1$ 1
- of
- Gebruikmaken van de driehoek die ontstaat door vector \vec{w}_d te laten aangrijpen in het eindpunt van vector \vec{w}_z 1
 - De hoek tussen de zijde met lengte 3 en de zijde met lengte 5 is 75° 2
 - De cosinusregel geeft $|\vec{w}_r|^2 = 3^2 + 5^2 - 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cos(75^\circ)$ 1
 - Hieruit volgt $|\vec{w}_r| \approx 5,1$ 1

Opmerking

Voor het tweede antwoordelement van het tweede antwoordalternatief mag voor een niet volledig juist antwoord 1 scorepunt worden toegekend.

Vraag	Antwoord	Scores
-------	----------	--------

Twee logaritmische functies

13 maximumscore 4

- Als $x_B = b$, dan $x_A = b - 3$ (of: als $x_A = a$, dan $x_B = a + 3$) 1
- Er moet gelden $\log(\sqrt{b-3}) = \log(b\sqrt{b}) - 1$ (of:
 $\log(\sqrt{a}) = \log((a+3)\sqrt{a+3}) - 1$) 1
- Beschrijven hoe deze vergelijking opgelost kan worden 1
- Dit geeft $q \approx -0,20$ of $q \approx 0,34$ 1

of

- $\log(\sqrt{x_A}) = q$, dus $\sqrt{x_A} = 10^q$, dus $x_A = 10^{2q}$, dus $x_B = 10^{2q} + 3$ 1
- Er moet gelden $\log\left(\left(10^{2q} + 3\right)\sqrt{10^{2q} + 3}\right) - 1 = q$ 1
- Beschrijven hoe deze vergelijking opgelost kan worden 1
- Dit geeft $q \approx -0,20$ of $q \approx 0,34$ 1

of

- $\log(\sqrt{x_A}) = q$, dus $\sqrt{x_A} = 10^q$, dus $x_A = 10^{2q}$ en $\log(x_B\sqrt{x_B}) - 1 = q$, dus
 $x_B\sqrt{x_B} = 10^{q+1}$, dus $x_B = \left(10^{q+1}\right)^{\frac{2}{3}}$ 1
- Er moet gelden $\left(10^{q+1}\right)^{\frac{2}{3}} - 10^{2q} = 3$ 1
- Beschrijven hoe deze vergelijking opgelost kan worden 1
- Dit geeft $q \approx -0,20$ of $q \approx 0,34$ 1

14 maximumscore 3

- $\frac{CD}{CE} = \frac{\log(p\sqrt{p}) - 1 - \log(\sqrt{p})}{\log(\sqrt{p})}$ 1
- $\log(p\sqrt{p}) = 1\frac{1}{2}\log(p)$ en $\log(\sqrt{p}) = \frac{1}{2}\log(p)$ 1
- $\frac{CD}{CE} = \frac{1\frac{1}{2}\log(p) - 1 - \frac{1}{2}\log(p)}{\frac{1}{2}\log(p)} = \frac{\log(p) - 1}{\frac{1}{2}\log(p)} = \frac{2\log(p) - 2}{\log(p)}$ 1

of

- $f(x) = \frac{1}{2}\log(x)$ en $g(x) = 1\frac{1}{2}\log(x) - 1$ 1
- $CD = 1\frac{1}{2}\log(p) - 1 - \frac{1}{2}\log(p) = \log(p) - 1$ 1
- $\frac{CD}{CE} = \frac{\log(p) - 1}{\frac{1}{2}\log(p)} = \frac{2\log(p) - 2}{\log(p)}$ 1

Vraag	Antwoord	Scores
-------	----------	--------

15 maximumscore 2

- $\frac{2\log(p)-2}{\log(p)} = \frac{2-\frac{2}{\log(p)}}{1}$ 1
- Dus $\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{CD}{CE} = \left(\frac{2-0}{1}\right) = 2$ (en dit is de gevraagde grenswaarde) 1

Parabool en cirkel met variabele straal

16 maximumscore 5

- Voor de cirkel geldt $x^2 + (y-r)^2 = r^2$ 1
- Voor snijpunten van de cirkel en de parabool geldt $x^2 + (x^2 - r)^2 = r^2$ 1
- Herleiden tot $x^2(1 - 2r + x^2) = 0$ 1
- Dit geeft $x^2 = 0$ (of $x = 0$) of $x^2 = 2r - 1$ 1
- ($x^2 = 2r - 1$ moet twee oplossingen hebben, dus) er moet gelden $2r - 1 > 0$, dus $r > \frac{1}{2}$ 1

of

- Voor de cirkel geldt $x^2 + (y-r)^2 = r^2$ 1
- Voor snijpunten van de cirkel en de parabool geldt $y + (y-r)^2 = r^2$ 1
- Herleiden tot $y(y - 2r + 1) = 0$ 1
- Dit geeft $y = 0$ (dus $x = 0$) of $y = 2r - 1$ 1
- ($y = 2r - 1$ geeft twee gemeenschappelijke punten als $2r - 1 > 0$, dus) er moet gelden $2r - 1 > 0$, dus $r > \frac{1}{2}$ 1

17 maximumscore 5

- De inhoud van het omwentelingslichaam van de parabool kan worden berekend met de integraal $\int_0^r \pi y \, dy$ 1
- Een primitieve van πy is $\frac{1}{2} \pi y^2$ 1
- Invullen van de grenzen geeft voor de inhoud $\frac{1}{2} \pi r^2$ 1
- Er moet gelden $\frac{1}{2} \pi r^2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \pi r^3$ (of een gelijkwaardige vergelijking) 1
- Dit geeft $\pi r^2(3 - 8r) = 0$, dus $r = \frac{3}{8}$ 1