

Vraag	Antwoord	Scores
-------	----------	--------

Buiten een vierkant

15 maximumscore 5

- Een vergelijking van de cirkel is $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 5$ 1
- De lijn door A en C heeft vergelijking $y = 4 - x$ 1
- De cirkel snijden met deze lijn geeft $x^2 - 5x + 4 = 0$ 1
- Dan volgt $(x-1)(x-4) = 0$ dus de x -coördinaat van F is 1 (want $x = 4$ geeft punt A) 1
- $F(1, 3)$ en omdat $C(0, 4)$ en $S(2, 2)$ (of: omdat F op CS ligt en $x_F = 1 = \frac{0+2}{2} = \frac{x_C + x_S}{2}$) is F het midden van CS 1

of

- (Omdat $C(0, 4)$ en $S(2, 2)$ geldt:) het midden van CS is het punt $(1, 3)$ 1
- De afstand tussen $(1, 3)$ en $(3, 2)$ is $\sqrt{5}$ 1
- Ook geldt $MA(=MB) = \sqrt{5}$ 1
- Dus $(1, 3)$ ligt op de gegeven cirkel 1
- Dus is F het midden van CS 1

of

- (Omdat $C(0, 4)$ en $S(2, 2)$ geldt:) het midden van CS is het punt $(1, 3)$ 1
- Een vergelijking van de cirkel is $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 5$ 1
- De lijn door A en C heeft vergelijking $y = 4 - x$ 1
- Omdat $(1-3)^2 + (3-2)^2 = 5$ ligt $(1, 3)$ op de cirkel 1
- Omdat $3 = 4 - 1$ ligt $(1, 3)$ op de lijn door A en C (en dus is F het midden van CS) 1

Vraag	Antwoord	Scores
-------	----------	--------

16 maximumscore 3

$$\bullet \quad \overrightarrow{MF} \cdot \overrightarrow{MB} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 0 \text{ dus } \angle(\overrightarrow{MF}, \overrightarrow{MB}) = 90^\circ \quad 1$$

$$\bullet \quad \overrightarrow{MG} \cdot \overrightarrow{MA} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = 0 \text{ dus } \angle(\overrightarrow{MG}, \overrightarrow{MA}) = 90^\circ \quad 1$$

- $\angle(\overrightarrow{MF}, \overrightarrow{MB}) + \angle(\overrightarrow{MG}, \overrightarrow{MA}) = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$ (of: cirkelsector BMF is een kwart cirkel en cirkelsector GMA is een kwart cirkel), dus de oppervlakte van de twee sectoren samen is gelijk aan de helft van de oppervlakte van de cirkel 1

of

$$\bullet \quad rc_{MB} = 2 \text{ en } rc_{FM} = -\frac{1}{2} \text{ dus } rc_{MB} \cdot rc_{FM} = -1 \text{ en dus } \overrightarrow{MB} \perp \overrightarrow{MF} \quad 1$$

$$\bullet \quad rc_{MA} = -2 \text{ en } rc_{GM} = \frac{1}{2} \text{ dus } rc_{MA} \cdot rc_{GM} = -1 \text{ en dus } \overrightarrow{MA} \perp \overrightarrow{MG} \quad 1$$

- Dan volgt: cirkelsector BMF is een kwart cirkel en cirkelsector GMA is een kwart cirkel (of: $\angle(\overrightarrow{MF}, \overrightarrow{MB}) + \angle(\overrightarrow{MG}, \overrightarrow{MA}) = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$), dus de oppervlakte van de twee sectoren samen is gelijk aan de helft van de oppervlakte van de cirkel 1

of

$$\bullet \quad \cos(\angle(\overrightarrow{MF}, \overrightarrow{MG})) = \frac{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}}{\left| \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} \right|} = \frac{3}{5} \quad 1$$

$$\bullet \quad \cos(\angle(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA})) = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}}{\left| \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right|} = -\frac{3}{5} \quad 1$$

- $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos(\alpha)$, dus $\angle(\overrightarrow{MF}, \overrightarrow{MG}) + \angle(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA}) = 180^\circ$, dus de oppervlakte van de twee sectoren samen is gelijk aan de helft van de oppervlakte van de cirkel 1

Opmerking

Wanneer de hoeken zijn benaderd voor deze vraag maximaal 2 scorepunten toekennen.