De stelling van Ptolemaeus

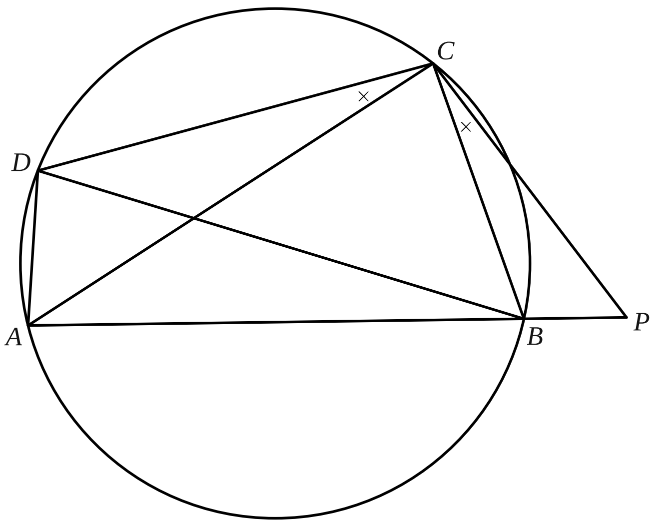
De Griekse wiskundige Ptolemaeus leefde van 87 tot 150 na Christus.
In een van zijn stellingen formuleert hij het volgende verband tussen de lengtes van de twee diagonalen en de vier zijden van een koordenvierhoek $ABCD$:

$$AC \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC$$

In deze opgave gaan we deze stelling van Ptolemaeus in stappen bewijzen.

In de figuur is een koordenvierhoek $ABCD$ getekend. Verder is op het verlengde van zijde AB, aan de kant van B, punt P getekend waarvoor geldt: $\angle ACD = \angle PCB$.

figuur



De driehoeken ACD en PCB zijn gelijkvormig.

4p **3** Bewijs dit. Je kunt hierbij gebruikmaken van de figuur op de uitwerkbijlage.

Ook de driehoeken BCD en PCA zijn gelijkvormig.

4p **4** Bewijs dit. Je kunt hierbij gebruikmaken van de figuur op de uitwerkbijlage.

Uit de gelijkvormigheid van de driehoeken BCD en PCA volgt de uitdrukking

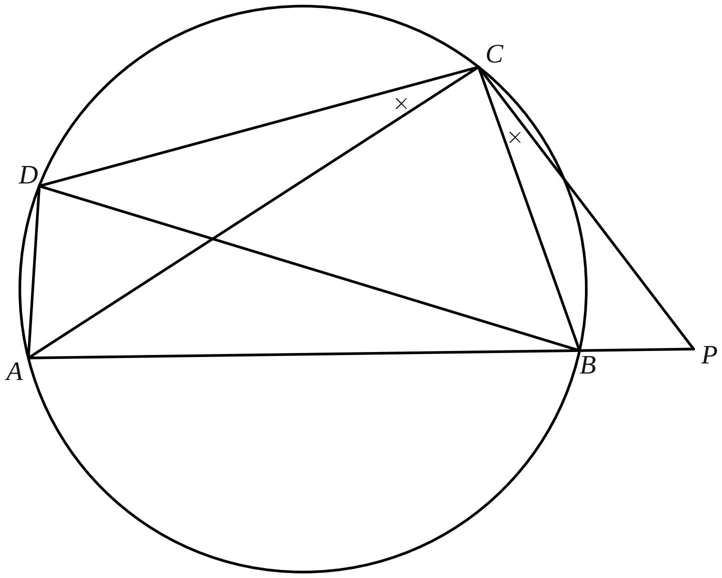
$$AP \cdot CD = AC \cdot BD$$

Uit de gelijkvormigheid van de driehoeken ACD en PCB volgt voor $BP \cdot CD$ een soortgelijke uitdrukking.

4p **5** Bewijs met behulp van deze uitdrukkingen de stelling van Ptolemaeus:
$AC \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC$

uitwerkbijlage

3



4