

Vraag	Antwoord	Scores
-------	----------	--------

Op een cirkel

12 maximumscore 7

- $-\frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}$ is de richtingscoëfficiënt van de raaklijn in P 1
- Een vergelijking van de raaklijn in P is

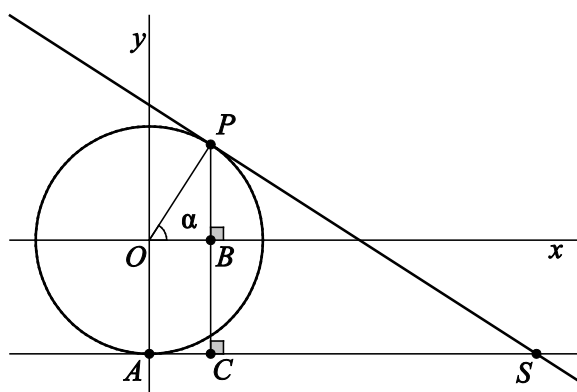
$$y - \sin(\alpha) = -\frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} \cdot (x - \cos(\alpha))$$
 2
- Snijden met de raaklijn in A geeft $-1 - \sin(\alpha) = -\frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} \cdot (x - \cos(\alpha))$ 1
- $-\frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} x = -1 - \sin(\alpha) - \frac{\cos^2(\alpha)}{\sin(\alpha)} = \frac{-\sin(\alpha) - \sin^2(\alpha) - \cos^2(\alpha)}{\sin(\alpha)} =$

$$= \frac{-\sin(\alpha) - 1}{\sin(\alpha)}$$
 2
- $x = \frac{-\sin(\alpha) - 1}{\sin(\alpha)} \cdot -\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \frac{1 + \sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$ 1

of

Vraag	Antwoord	Scores
-------	----------	--------

- De loodlijn vanuit P op de x -as snijdt de x -as in B en lijn AS in C , dan zijn de driehoeken OBP en PCS gelijkvormig (want (wegens $\angle OPB + \angle CPS = 90^\circ$; raaklijn en $\angle CSP + \angle CPS = 90^\circ$; hoekensom driehoek geldt) $\angle OPB = \angle CSP$ en $\angle OBP = \angle PCS$; hh) 2
- Dus $\frac{CS}{BP} = \frac{PC}{OB}$ 1
- Dit geeft $\frac{CS}{\sin(\alpha)} = \frac{\sin(\alpha)+1}{\cos(\alpha)}$ 1
- $CS = \frac{\sin^2(\alpha)+\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$ 1
- Voor de x -coördinaat van S geldt $x = \cos(\alpha) + \frac{\sin^2(\alpha)+\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$ 1
- $x = \frac{\cos^2(\alpha)+\sin^2(\alpha)+\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \frac{1+\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$ 1



of

- De driehoeken OAS en OPS zijn congruent ($OP = OA$; $\angle OAS = \angle OPS = 90^\circ$; $OS = OS$; ZZR) en dus $SA = SP$ 1
- Dus voor de x -coördinaat van S geldt $x = \sqrt{(x - \cos(\alpha))^2 + (1 + \sin(\alpha))^2}$ 2
- Dit geeft $x^2 = x^2 - 2x \cdot \cos(\alpha) + \cos^2(\alpha) + 1 + 2\sin(\alpha) + \sin^2(\alpha)$ 2
- Hieruit volgt $2x \cdot \cos(\alpha) = 2 + 2\sin(\alpha)$ 1
- Dus $x = \frac{2 + 2\sin(\alpha)}{2\cos(\alpha)} = \frac{1 + \sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$ 1

Vraag	Antwoord	Scores
-------	----------	--------

13 maximumscore 8

- (De coördinaten van Q zijn $(-\cos(\alpha), \sin(\alpha))$, dus) $PQ = 2\cos(\alpha)$ 1
- $AS = \frac{1+\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$ dus uit $AS = PQ$ volgt $\frac{1+\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = 2\cos(\alpha)$ 1
- Dit herleiden tot $2\sin^2(\alpha) + \sin(\alpha) - 1 = 0$ 1
- $(2\sin(\alpha) - 1)(\sin(\alpha) + 1) = 0$ geeft $\sin(\alpha) = \frac{1}{2}$ of $\sin(\alpha) = -1$ 1
- Dan volgt (omdat $0 < \alpha < \frac{1}{2}\pi$) $\alpha = \frac{1}{6}\pi$ 1
- $AS = PQ = (2 \cdot \cos(\frac{1}{6}\pi) =) \sqrt{3}$ 1
- $Q(-\frac{1}{2}\sqrt{3}, \frac{1}{2})$ en $A(0, -1)$ dus $AQ = \sqrt{3}$ 1
- (AS en PQ zijn evenwijdig en even lang, dus $AQ = PS$ en dus) de omtrek van $ASPQ$ is $4\sqrt{3}$ 1

of

- (De coördinaten van Q zijn $(-\cos(\alpha), \sin(\alpha))$, dus) de richtingscoëfficiënt van AQ is $\frac{\sin(\alpha)+1}{-\cos(\alpha)}$ en de richtingscoëfficiënt van de raaklijn in P is $-\frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}$ 1
- (De lijnstukken PQ en AS zijn evenwijdig en even lang, dus lijnstuk AQ is evenwijdig aan de raaklijn aan de cirkel in P ofwel) $\frac{\sin(\alpha)+1}{-\cos(\alpha)} = \frac{-\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}$ 1
- Dit herleiden tot $2\sin^2(\alpha) + \sin(\alpha) - 1 = 0$ 1
- $(2\sin(\alpha) - 1)(\sin(\alpha) + 1) = 0$ geeft $\sin(\alpha) = \frac{1}{2}$ of $\sin(\alpha) = -1$ 1
- Dan volgt (omdat $0 < \alpha < \frac{1}{2}\pi$) $\alpha = \frac{1}{6}\pi$ 1
- $AS = PQ = (2 \cdot \cos(\frac{1}{6}\pi) =) \sqrt{3}$ 1
- $Q(-\frac{1}{2}\sqrt{3}, \frac{1}{2})$ en $A(0, -1)$ dus $AQ = \sqrt{3}$ 1
- (AS en PQ zijn evenwijdig en even lang, dus $AQ = PS$ en dus) de omtrek van $ASPQ$ is $4\sqrt{3}$ 1

Opmerking

Als bij de beantwoording van deze vraag gebruik is gemaakt van de raaklijneigenschap (dus $PS = AS$) zonder deze expliciet te noemen, hiervoor 1 scorepunt in mindering brengen.