Vraag	Antwoord	Scores

Rakende grafieken?

1 maximumscore 5

- Er moet gelden $f(x) = g(x)$ en $f'(x) = g'(x)$ 1
- $f'(x) = \frac{1}{x}$ en $g'(x) = \frac{1}{e} \cdot x$ 1
- Uit $f'(x) = g'(x)$ volgt $x = \sqrt{e}$ ($x = -\sqrt{e}$ voldoet niet) 1
- $f\left(\sqrt{e}\right) = \frac{1}{2}$ en $g\left(\sqrt{e}\right) = \frac{1}{2}$ 1
- ($f\left(\sqrt{e}\right) = g\left(\sqrt{e}\right)$ en $f'\left(\sqrt{e}\right) = g'\left(\sqrt{e}\right)$, dus) de grafieken van f en g raken elkaar 1

Elektrische spanning

2 maximumscore 5

- De vergelijking $230 = 325\sin\left(100\pi t\right)$ moet worden opgelost 1
- Beschrijven hoe deze vergelijking kan worden opgelost 1
- Twee tijdstippen binnen één periode zijn bijvoorbeeld 0,0025 en 0,0075 1
- Dit geeft $\frac{0,0075 - 0,0025}{0,02} \cdot 100\% = 25\%$ 1
- (Vanwege symmetrie is het gevraagde percentage dus $2 \cdot 25\% =$) 50% (of nauwkeuriger) 1

of

- De vergelijkingen $230 = 325\sin\left(100\pi t\right)$ en $-230 = 325\sin\left(100\pi t\right)$ moeten worden opgelost 1
- Beschrijven hoe deze vergelijkingen kunnen worden opgelost 1
- Vier tijdstippen binnen één periode zijn bijvoorbeeld 0,0025 ; 0,0075 ; 0,0125 en 0,0175 1
- Dit geeft $\frac{0,0075 - 0,0025}{0,02} \cdot 100\% = 25\%$ en $\frac{0,0175 - 0,0125}{0,02} \cdot 100\% = 25\%$ 1
- Het gevraagde percentage is dus 50% (of nauwkeuriger) 1

Vraag	Antwoord	Scores

3 **maximumscore 3**

- De vergelijking $0{,}02 \cdot U_{\text{eff}}^2 = \int_0^{0{,}02} \left(325\sin(100\pi t)\right)^2 \, \mathrm{d}t$ moet worden opgelost 1
- Beschrijven hoe deze vergelijking kan worden opgelost 1
- Het antwoord: 229,81 (volt) 1

4 **maximumscore 5**

- $U'_{\text{kracht}}(t) = 325\left(100\pi \cdot \cos(100\pi t) - 100\pi \cdot \cos\left(100\pi t - \frac{2}{3}\pi\right)\right)$ 1
- $U'_{\text{kracht}}(t) = 0$ geeft $100\pi t = 100\pi t - \frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi$ (met k geheel) (welke geen oplossingen heeft) of $100\pi t = -\left(100\pi t - \frac{2}{3}\pi\right) + k \cdot 2\pi$ (met k geheel) 1
- $t = \frac{1}{300}$ (of een andere waarde van t waarvoor U_{kracht} maximaal is) (of $t = \frac{1}{75}$) 1
- Een toelichting waaruit blijkt dat $t = \frac{1}{300}$ de maximale waarde van U_{kracht} geeft, bijvoorbeeld met een grafiek 1
- De maximale waarde van U_{kracht} is $325\sqrt{3}$ (volt) 1

of

- $\sin(100\pi t) - \sin\left(100\pi t - \frac{2}{3}\pi\right) =$
  $2\sin\left(\dfrac{100\pi t - (100\pi t - \frac{2}{3}\pi)}{2}\right) \cdot \cos\left(\dfrac{100\pi t + (100\pi t - \frac{2}{3}\pi)}{2}\right)$ 2
- Dit is gelijkwaardig met $2\sin\left(\frac{1}{3}\pi\right) \cdot \cos\left(100\pi t - \frac{1}{3}\pi\right)$ 1
- De bijbehorende grafiek is een sinusoïde met amplitude $\sqrt{3}$ 1
- De maximale waarde van U_{kracht} is $325\sqrt{3}$ (volt) 1

Vraag	Antwoord	Scores

Bissectrice en cirkel

5 maximumscore 3

- $\angle CAD = \angle CBA$; *hoek tussen koorde en raaklijn* 1
- $\angle CBA = \angle CAB$; *gelijkbenige driehoek* 1
- Dus $\angle CAD = \angle CAB$ (dus *AC* is bissectrice van hoek *BAD*) 1

6 maximumscore 4

- $\angle CAD = \angle CFD$; *constante hoek* 1
- $\angle EFG = 180° - \angle CFG$; *gestrekte hoek* 1
- $\angle CAD = \angle EAG$ (vorige vraag), dus $\angle EAG = \angle CFD = \angle CFG$ 1
- $\angle EAG + \angle EFG = 180°$, dus *AEFG* is een koordenvierhoek (; *koordenvierhoek*) (en dus ligt *G* op de cirkel door *A*, *E* en *F*) 1

of

- $\angle ACF = \angle ADF$, dus $\angle ACE = \angle ADF$; *constante hoek* 1
- $\angle AGF = \angle ADG + \angle GAD = \angle ADF + \angle CAD$; *buitenhoek driehoek* 1
- $\angle CAE = \angle CAD$ (vorige vraag) zodat $\angle AEF = \angle AEC = 180° - \angle ACE - \angle CAE = 180° - \angle ACE - \angle CAD$; *hoekensom driehoek* 1
- $\angle AGF + \angle AEF = 180°$, dus *AEFG* is een koordenvierhoek (; *koordenvierhoek*) (en dus ligt *G* op de cirkel door *A*, *E* en *F*) 1

of

- $\angle ACF = \angle ADF$, dus $\angle ACE = \angle ADG$; *constante hoek* 1
- $\angle CAD = \angle CAE$, dus $\angle GAD = \angle CAE$ (vorige vraag) 1
- $\Delta AGD \sim \Delta AEC$; *hh*, dus $\angle AGD = \angle AEC$ 1
- $\angle AGF = 180° - \angle AGD$; *gestrekte hoek*, dus $\angle AGF + \angle AEF = 180° - \angle AGD + \angle AEC = 180° - \angle AGD + \angle AGD = 180°$, dus *AEFG* is een koordenvierhoek (; *koordenvierhoek*) (en dus ligt *G* op de cirkel door *A*, *E* en *F*) 1

Vraag	Antwoord	Scores

Twee sinusoïden

7 maximumscore 7

- Voor de lengte L van het lijnstuk geldt $L(p) = f(p) - g(p)$ $\left(= \frac{1}{2}\sin\left(2p - \frac{2}{3}\pi\right) - \frac{1}{4}\sqrt{3} - \sin(p - \frac{2}{3}\pi)\right)$ 1
- $L'(p) = \cos(2p - \frac{2}{3}\pi) - \cos(p - \frac{2}{3}\pi)$ 2
- $L'(p) = 0$ geeft $2p - \frac{2}{3}\pi = p - \frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi$ (met k geheel) of $2p - \frac{2}{3}\pi = -(p - \frac{2}{3}\pi) + k \cdot 2\pi$ (met k geheel) 1
- Dit geeft $p = k \cdot 2\pi$ (met k geheel) of $p = \frac{4}{9}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi$ (met k geheel) 2
- Het antwoord: $p = \frac{4}{9}\pi$ (en de andere oplossingen voldoen niet) 1

of

- Voor de gevraagde waarde van p geldt $f'(p) = g'(p)$ 1
- $f'(p) = \cos(2p - \frac{2}{3}\pi)$ 1
- $g'(p) = \cos(p - \frac{2}{3}\pi)$ 1
- $f'(p) = g'(p)$ geeft $2p - \frac{2}{3}\pi = p - \frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi$ (met k geheel) of $2p - \frac{2}{3}\pi = -(p - \frac{2}{3}\pi) + k \cdot 2\pi$ (met k geheel) 1
- Dit geeft $p = k \cdot 2\pi$ (met k geheel) of $p = \frac{4}{9}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi$ (met k geheel) 2
- Het antwoord: $p = \frac{4}{9}\pi$ (en de andere oplossingen voldoen niet) 1

of

Vraag	Antwoord	Scores

- Voor de lengte L van het lijnstuk geldt $L(p) = f(p) - g(p)$ $\left(= \frac{1}{2}\sin\left(2p - \frac{2}{3}\pi\right) - \frac{1}{4}\sqrt{3} - \sin(p - \frac{2}{3}\pi)\right)$ — 1
- $L(p) = \frac{1}{2}\left(\sin(2p)\cdot\cos\left(\frac{2}{3}\pi\right) - \cos(2p)\cdot\sin\left(\frac{2}{3}\pi\right)\right) - \frac{1}{4}\sqrt{3} - \left(\sin(p)\cos\left(\frac{2}{3}\pi\right) - \cos(p)\sin\left(\frac{2}{3}\pi\right)\right) = -\frac{1}{4}\sin(2p) - \frac{1}{4}\sqrt{3}\cdot\cos(2p) - \frac{1}{4}\sqrt{3} + \frac{1}{2}\sin(p) + \frac{1}{2}\sqrt{3}\cdot\cos(p)$ — 1
- $L'(p) = -\frac{1}{2}\cos(2p) + \frac{1}{2}\sqrt{3}\cdot\sin(2p) + \frac{1}{2}\cos(p) - \frac{1}{2}\sqrt{3}\cdot\sin(p)$ — 1
- $\frac{1}{2}(\cos(p) - \cos(2p)) + \frac{1}{2}\sqrt{3}(\sin(2p) - \sin(p)) = 0$, dus $\frac{1}{2}\left(-2\sin\left(1\frac{1}{2}p\right)\cdot\sin\left(-\frac{1}{2}p\right)\right) + \frac{1}{2}\sqrt{3}\left(2\sin\left(\frac{1}{2}p\right)\cdot\cos\left(1\frac{1}{2}p\right)\right) = 0$ — 1
- $\sin\left(\frac{1}{2}p\right)\cdot\sin\left(1\frac{1}{2}p\right) + \sqrt{3}\cdot\sin\left(\frac{1}{2}p\right)\cdot\cos\left(1\frac{1}{2}p\right) = 0$, dus $\sin\left(\frac{1}{2}p\right) = 0$ of $\sin\left(1\frac{1}{2}p\right) + \sqrt{3}\cdot\cos\left(1\frac{1}{2}p\right) = 0$; uit $\sin\left(\frac{1}{2}p\right) = 0$ volgt $p = k\cdot 2\pi$ (met k geheel) — 1
- Uit $\sin\left(1\frac{1}{2}p\right) + \sqrt{3}\cdot\cos\left(1\frac{1}{2}p\right) = 0$ volgt $\tan\left(1\frac{1}{2}p\right) = -\sqrt{3}$, dus $p = -\frac{2}{9}\pi + k\cdot\frac{2}{3}\pi$ (met k geheel) — 1
- Het antwoord: $p = \frac{4}{9}\pi$ (en de andere oplossingen voldoen niet) — 1

Opmerkingen

– *Als de kandidaat niet expliciet met p heeft gewerkt (maar bijvoorbeeld met x), hiervoor geen scorepunten in mindering brengen.*

– *Als bij het eerste of het tweede antwoordalternatief alleen* $2p - \frac{2}{3}\pi = p - \frac{2}{3}\pi + k\cdot 2\pi$ *wordt opgelost, met als conclusie 'geen oplossingen', voor deze vraag maximaal 4 scorepunten toekennen.*

– *Als bij het derde antwoordalternatief alleen* $\sin\left(\frac{1}{2}p\right) = 0$ *wordt opgelost, met als conclusie 'geen oplossingen', voor deze vraag maximaal 4 scorepunten toekennen.*

Vraag	Antwoord	Scores

Sinus en parabool

8 maximumscore 5

- $3\sin(x) - 2\sin^2(x) = 1$ — 1
- Beschrijven hoe deze vergelijking op exacte wijze kan worden opgelost — 1
- $\sin(x) = \frac{1}{2}$ ($\sin(x) = 1$ hoort bij P) — 1
- De x-coördinaten van de twee andere punten zijn $x = \frac{1}{6}\pi$ en $x = \frac{5}{6}\pi$ — 1
- Het antwoord: $\frac{2}{3}\pi$ — 1

9 maximumscore 5

- De oppervlakte is $\int_0^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x$ — 1
- Uit $\cos(2x) = 1 - 2\sin^2(x)$ volgt $-2\sin^2(x) = \cos(2x) - 1$, dus $f(x) = 3\sin(x) + \cos(2x) - 1$ — 1
- De oppervlakte is $\int_0^{\pi} (3\sin(x) + \cos(2x) - 1)\,\mathrm{d}x$ — 1
- Een primitieve van $3\sin(x) + \cos(2x) - 1$ is $-3\cos(x) + \frac{1}{2}\sin(2x) - x$ — 1
- De oppervlakte is $6 - \pi$ — 1

Vraag	Antwoord	Scores

10 maximumscore 6

- $f'(x) = 3\cos(x) - 4\sin(x)\cos(x)$ 2
- $g'(x) = 2ax + b$ 1
- $g'(0) = f'(0)$ geeft $b = 3$ 1
- $g(\pi) = 0$ en $b = 3$ geeft $a\pi^2 + 3\pi = 0$ 1
- Hieruit volgt $a = \frac{-3}{\pi}$ (of een gelijkwaardige uitdrukking) 1

of

- $f'(x) = 3\cos(x) - 4\sin(x)\cos(x)$ 2
- $g'(x) = 2ax + b$ 1
- $g'(0) = f'(0)$ geeft $b = 3$ 1
- $g'(\pi) = f'(\pi)$ en $b = 3$ geeft $2a\pi + 3 = -3$ (of $g'(\frac{1}{2}\pi) = 0$ geeft $a\pi + 3 = 0$) 1
- Hieruit volgt $a = \frac{-3}{\pi}$ (of een gelijkwaardige uitdrukking) 1

of

- $f'(x) = 3\cos(x) - 4\sin(x)\cos(x)$ 2
- $g'(x) = 2ax + b$ 1
- $g(\pi) = 0$ geeft $b = -a\pi$ 1
- $g'(\pi) = f'(\pi)$ en $b = -a\pi$ geeft $a\pi = -3$ 1
- Hieruit volgt $a = \frac{-3}{\pi}$ (of een gelijkwaardige uitdrukking) en $b = 3$ 1

of

- $f'(x) = 3\cos(x) - 4\sin(x)\cos(x)$ 2
- $g(\pi) = 0$ geeft $g(x) = ax(x - \pi) = ax^2 - a\pi x$, dus $b = -a\pi$ (of $x_{top} = -\frac{b}{2a}$ geeft $b = -a\pi$) 1
- $g'(x) = 2ax - a\pi$ 1
- $g'(0) = f'(0)$ geeft $-a\pi = 3$ 1
- Hieruit volgt $a = \frac{-3}{\pi}$ (of een gelijkwaardige uitdrukking) en $b = 3$ 1

Opmerkingen

– *Omdat gegeven is dat er waarden van a en b bestaan waarvoor aan de drie voorwaarden is voldaan, hoeft na berekening van deze waarden uit twee van de drie voorwaarden de derde voorwaarde niet gecontroleerd te worden.*

– *Als een kandidaat bij het differentiëren de kettingregel niet of niet correct heeft toegepast, voor deze vraag maximaal 4 scorepunten toekennen.*

Vraag	Antwoord	Scores

Brandwerendheid van een deur

11 maximumscore 5

- $T'_{\text{nat}}(t) = 1050 \cdot \text{e}^{-\ln^2(t)+6\ln(t)-9} \cdot \left(\dfrac{-2\ln(t)}{t} + \dfrac{6}{t}\right)$ 2
- $T'_{\text{nat}}(t) = 0$ geeft $\dfrac{-2\ln(t)}{t} + \dfrac{6}{t} = 0$ 1
- Dit geeft $\ln(t) = 3$ 1
- De maximale temperatuur is $20 + 1050 \cdot \text{e}^0 = 1070$ (°C) 1

of

- De herleiding tot $20 + 1050 \cdot \text{e}^{-(\ln(t)-3)^2}$ 2
- Dit is maximaal als $-(\ln(t)-3)^2$ maximaal is 1
- Dat is het geval als $\ln(t) = 3$ 1
- De maximale temperatuur is $20 + 1050 \cdot \text{e}^0 = 1070$ (°C) 1

of

- T_{nat} is maximaal als $-\ln^2(t) + 6\ln(t) - 9$ maximaal is 2
- $\dfrac{\text{d}}{\text{d}t}\left(-\ln^2(t) + 6\ln(t) - 9\right) = \dfrac{-2\ln(t)}{t} + \dfrac{6}{t}$ 1
- $\dfrac{-2\ln(t)}{t} + \dfrac{6}{t} = 0$ geeft $\ln(t) = 3$ 1
- De maximale temperatuur is $20 + 1050 \cdot \text{e}^0 = 1070$ (°C) 1

Opmerking
Als in het eerste antwoordalternatief voor $T'_{\text{nat}}(t)$ de uitdrukking $1050 \cdot \text{e}^{-\ln^2(t)+6\ln(t)-9} \cdot \left(-2\ln(t) + \dfrac{6}{t}\right)$ wordt gegeven, dan één van de twee scorepunten voor de afgeleide functie toekennen.

12 maximumscore 4

- De vergelijking $20 + 345 \cdot \log(8t+1) = 300$ moet worden opgelost 1
- $\log(8t+1) = \frac{280}{345}$ (of $0,8116$) 1
- $8t + 1 = 10^{\frac{280}{345}}$ (of $6,4803$) 1
- Het antwoord: $t \approx 0,685$ (minuten) 1

Vraag	Antwoord	Scores

13 maximumscore 7

- De oppervlakte van het grijze vlakdeel in figuur 3 is
  $\int_{0,69}^{30} \left(20+345\cdot\log(8t+1)-300\right)\mathrm{d}t$ 1
- Deze oppervlakte is (ongeveer) 11 929 1
- Beschrijven hoe de vergelijking $T_{\text{nat}}(t)=300$ kan worden opgelost 1
- Dit geeft $t\approx 6{,}36$ (of nauwkeuriger) 1
- De oppervlakte bij de natuurlijke brand is
  $\int_{6{,}36}^{30} (20+1050\cdot \mathrm{e}^{-\ln^2(t)+6\ln(t)-9}-300)\,\mathrm{d}t$ 1
- Deze oppervlakte is (ongeveer) 14 242 1
- ($14\,242>11\,929$, dus) de deur houdt tijdens de natuurlijke brand niet minstens 30 minuten stand 1

of

- De oppervlakte van het grijze vlakdeel in figuur 3 is
  $\int_{0,69}^{30} \left(20+345\cdot\log(8t+1)-300\right)\mathrm{d}t$ 1
- Deze oppervlakte is (ongeveer) 11 929 1
- Beschrijven hoe de vergelijking $T_{\text{nat}}(t)=300$ kan worden opgelost 1
- Dit geeft $t\approx 6{,}36$ (of nauwkeuriger) 1
- Beschrijven hoe de vergelijking
  $\int_{6{,}36}^{x} (20+1050\cdot \mathrm{e}^{-\ln^2(t)+6\ln(t)-9}-300)\,\mathrm{d}t=11\,929$ kan worden opgelost 1
- Dit geeft $x\approx 26$ 1
- ($26<30$, dus) de deur houdt tijdens de natuurlijke brand niet minstens 30 minuten stand 1

Opmerkingen

– *In plaats van de ondergrens 0,69 van de eerste integraal mag ook de nauwkeuriger waarde gebruikt worden die in de vorige vraag is berekend.*

– *Als in één of beide integralen de term 300 is vergeten, voor deze vraag maximaal 6 scorepunten toekennen.*

Vraag	Antwoord	Scores

Parallellogram met verlengde diagonaal

14 maximumscore 5

- AC deelt BD middendoor; *parallellogram* 1
- Noem het snijpunt van AC en BD punt S, dan is lijn ES een zwaartelijn van driehoek DBE (; *zwaartelijn driehoek*) 1
- BD deelt AC middendoor (dus $CS = \frac{1}{2} \cdot CA = \frac{1}{2} \cdot CE$) 1
- C ligt op zwaartelijn ES met $EC : CS = 2 : 1$ 1
- C is dus het snijpunt van de zwaartelijnen van driehoek DBE (want er is maar één punt Z op ES met $EZ : CZ = 2 : 1$) (; *zwaartelijnen driehoek*) 1

of

- AC deelt DB middendoor; *parallellogram* 1
- C ligt op zwaartelijn EA van driehoek DBE (; *zwaartelijn driehoek*) 1
- Noem het snijpunt van BC en DE punt T, dan geldt $\angle ADE = \angle CTE$; *parallellogram, F-hoeken* en $\angle DEA = \angle TEC$, dus $\Delta ADE \sim \Delta CTE$; *hh* 1
- C is het midden van AE, dus T is het midden van DE en dus ligt C op zwaartelijn BT van driehoek DBE (; *zwaartelijn driehoek*) 1
- C is dus het snijpunt van de zwaartelijnen van driehoek DBE (; *zwaartelijnen driehoek*) 1

of

- Noem het snijpunt van CD en BE punt P 1
- Dan geldt $\angle ABE = \angle CPE$ en $\angle BAE = \angle PCE$; *parallellogram, F-hoeken*, dus $\Delta ABE \sim \Delta CPE$; *hh* 1
- C is het midden van AE, dus P is het midden van BE en dus ligt C op zwaartelijn DP van driehoek DBE (; *zwaartelijn driehoek*) 1
- Uit eenzelfde redenering met het punt Q, het snijpunt van BC en DE, volgt dat C op zwaartelijn BQ van driehoek DBE ligt 1
- C is dus het snijpunt van de zwaartelijnen van driehoek DBE (; *zwaartelijnen driehoek*) 1