Parabolen met gemeenschappelijke raaklijn

Voor elke waarde van p is de functie f_p gegeven door:

$$f_p(x) = (x-p)^2 + 2p$$

De grafieken van deze functies zijn parabolen.

Twee van deze parabolen gaan door de oorsprong.

4p **1** Bereken exact de coördinaten van de toppen van deze twee parabolen.

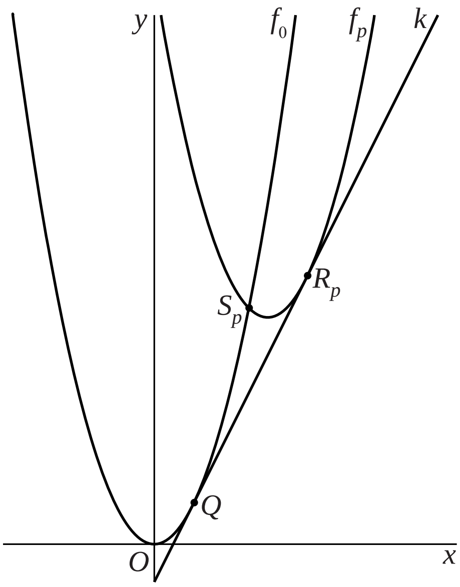
Verder is gegeven de lijn k met vergelijking $y = 2x - 1$.

Voor elke waarde van p raakt de lijn k aan de grafiek van f_p in het punt met coördinaten $(p+1\,;\,2p+1)$.

4p **2** Bewijs dat het punt $(p+1\,;\,2p+1)$ inderdaad raakpunt is.

We bekijken de functies f_0 en f_p (met $p \neq 0$).
De lijn k raakt de grafiek van f_0 in Q en de grafiek van f_p in R_p.
De grafieken van f_0 en f_p snijden elkaar in S_p. Zie figuur 1.

figuur 1

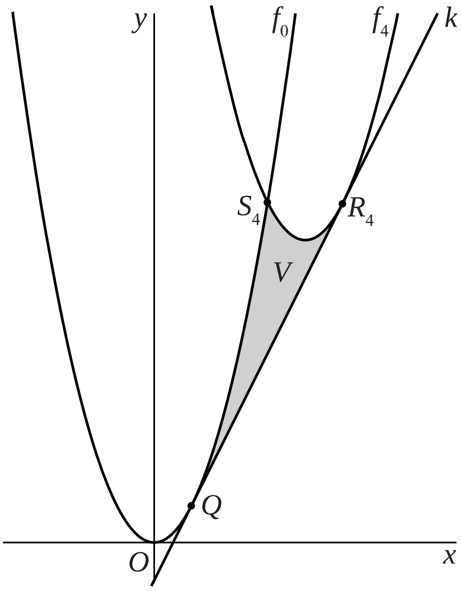


Er geldt: de x-coördinaat van S_p is het gemiddelde van de x-coördinaten van Q en R_p.

5p **3** Bewijs dit.

De grafieken van f_0 en f_4 en de gemeenschappelijke raaklijn k sluiten een gebied V in.
Zie figuur 2, waarin gebied V met grijs is aangegeven.

figuur 2



6p **4** Bereken exact de oppervlakte van V.