Vraag	Antwoord	Scores

Parabolen met gemeenschappelijke raaklijn

1 maximumscore 4

- $f_p(0) = p^2 + 2p = 0$ 1
- $p(p+2) = 0$ geeft $p = 0$ of $p = -2$ 1
- $p = 0$ geeft $f_0(x) = x^2$ met top $(0, 0)$ 1
- $p = -2$ geeft $f_{-2}(x) = \left(x+2\right)^2 - 4$ met top $(-2, -4)$ 1

2 maximumscore 4

- Het punt $(p+1; 2p+1)$ ligt op k want $2p+1 = 2(p+1)-1$ 1
- Het punt $(p+1; 2p+1)$ ligt op de grafiek van f_p want $f_p(p+1) = 2p+1$ 1
- $f_p'(x) = 2(x-p)$ 1
- $f_p'(p+1) = 2$ en dit is ook de richtingscoëfficiënt van k (dus $(p+1; 2p+1)$ is het raakpunt) 1

of

- Voor het gemeenschappelijke punt geldt $(x-p)^2 + 2p = 2x - 1$ 1
- Uitwerken geeft $x^2 - (2p+2)x + p^2 + 2p + 1 = 0$ 1
- De discriminant van deze vergelijking is $\left(-(2p+2)\right)^2 - 4(p^2 + 2p + 1) = 0$ (dus het gemeenschappelijke punt is een raakpunt) 1
- $x = \dfrac{2p+2}{2} = p+1$ en $y = 2(p+1) - 1 = 2p+1$ (dus $(p+1; 2p+1)$ is het raakpunt) 1

of

- $f_p'(x) = 2(x-p)$ 1
- $f_p'(x) = 2$ geeft $x = p+1$ 1
- $x = p+1$ invullen in de vergelijking van k geeft $y = 2p+1$ 1
- Ook $f_p(p+1) = 2p+1$ (dus $(p+1; 2p+1)$ is het raakpunt) 1

Vraag	Antwoord	Scores

3 maximumscore 5

- De x-coördinaten van Q en R_p zijn 1 en $p+1$ — 1
- Het gemiddelde van de x-coördinaten van Q en R_p is $\frac{1+p+1}{2}$ $(=\frac{1}{2}p+1)$ — 1
- $f_0(\frac{1}{2}p+1)=(\frac{1}{2}p+1)^2=\frac{1}{4}p^2+p+1$ — 1
- $f_p(\frac{1}{2}p+1)=(-\frac{1}{2}p+1)^2+2p=\frac{1}{4}p^2-p+1+2p$ — 1
- $f_0(\frac{1}{2}p+1)=f_p(\frac{1}{2}p+1)$ (dus de x-coördinaat van S_p is het gemiddelde van de x-coördinaten van Q en R_p) — 1

of

- De x-coördinaten van Q en R_p zijn 1 en $p+1$ — 1
- Het gemiddelde van de x-coördinaten van Q en R_p is $\frac{1+p+1}{2}$ $(=\frac{1}{2}p+1)$ — 1
- Voor de x-coördinaat van S_p geldt $(x-p)^2+2p=x^2$ — 1
- $x^2-2px+p^2+2p=x^2$ geeft $2px=p^2+2p$ — 1
- Hieruit volgt $x=\frac{1}{2}p+1$ (dus de x-coördinaat van S_p is het gemiddelde van de x-coördinaten van Q en R_p) — 1

Vraag	Antwoord	Scores

4 **maximumscore 6**

- De raakpunten liggen bij $x = 1$ en $x = 5$ — 1
- De x-coördinaat van S_4 is (het gemiddelde van 1 en 5, dus) 3 — 1
- De oppervlakte van V is $\int_1^3 f_0(x)\,dx + \int_3^5 f_4(x)\,dx - \int_1^5 (2x-1)\,dx$ — 1
- Een primitieve van f_0 is $\frac{1}{3}x^3$ en een primitieve van f_4 is $\frac{1}{3}x^3 - 4x^2 + 24x$ — 1
- Een primitieve van $2x-1$ is $x^2 - x$ — 1
- De oppervlakte van V is $(8\frac{2}{3} + 16\frac{2}{3} - 20 =)\ 5\frac{1}{3}$ — 1

of

- De raakpunten liggen bij $x = 1$ en $x = 5$ — 1
- De x-coördinaat van S_4 is (het gemiddelde van 1 en 5, dus) 3 — 1
- De oppervlakte van V is $\int_1^3 \left(f_0(x) - (2x-1)\right)dx + \int_3^5 \left(f_4(x) - (2x-1)\right)dx$ — 1
- $f_0(x) - (2x-1) = x^2 - 2x + 1$ en $f_4(x) - (2x-1) = x^2 - 10x + 25$ — 1
- Een primitieve van $x^2 - 2x + 1$ is $\frac{1}{3}x^3 - x^2 + x$ en een primitieve van $x^2 - 10x + 25$ is $\frac{1}{3}x^3 - 5x^2 + 25x$ — 1
- De oppervlakte van V is $(2\frac{2}{3} + 2\frac{2}{3} =)\ 5\frac{1}{3}$ — 1

of

- De raakpunten liggen bij $x = 1$ en $x = 5$ — 1
- De x-coördinaat van S_4 is (het gemiddelde van 1 en 5, dus) 3 — 1
- De oppervlakte van V is $\int_1^3 f_0(x)\,dx + \int_3^5 f_4(x)\,dx$ verminderd met de oppervlakte van de rechthoek en driehoek onder de raaklijn — 1
- Een primitieve van f_0 is $\frac{1}{3}x^3$ en een primitieve van f_4 is $\frac{1}{3}x^3 - 4x^2 + 24x$ — 1
- De oppervlakte van de rechthoek en de driehoek samen is $4 \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 8 = 20$ — 1
- De oppervlakte van V is $(8\frac{2}{3} + 16\frac{2}{3} - 20 =)\ 5\frac{1}{3}$ — 1

Vraag	Antwoord	Scores

Spots

5 maximumscore 4

- $r^2 = x^2 + d^2$ (en dus $\dfrac{1}{r^2} = \dfrac{1}{x^2+d^2}$) 1
- $\cos\alpha = \dfrac{x}{r}$ 1
- $\dfrac{x}{r} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+d^2}}$ 1
- $E = \dfrac{I_{\text{spot}}}{4\pi}\cdot\dfrac{1}{x^2+d^2}\cdot\dfrac{x}{\sqrt{x^2+d^2}} = \dfrac{I_{\text{spot}}}{4\pi}\cdot\dfrac{x}{\left(x^2+d^2\right)^{\frac{3}{2}}}$ 1

6 maximumscore 7

- $\dfrac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}x} = \dfrac{I_{\text{spot}}}{4\pi}\cdot\dfrac{1\cdot\left(x^2+100\right)^{\frac{3}{2}} - x\cdot\frac{3}{2}\cdot\left(x^2+100\right)^{\frac{1}{2}}\cdot 2x}{\left(\left(x^2+100\right)^{\frac{3}{2}}\right)^2}$ 2
- $\dfrac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}x} = 0$ geeft $\left(x^2+100\right)^{\frac{3}{2}} - 3x^2\left(x^2+100\right)^{\frac{1}{2}} = 0$ 1
- $\left(x^2+100\right)^{\frac{1}{2}}\left(x^2+100-3x^2\right) = 0$ 1
- $x^2+100-3x^2 = 0$ (omdat $\left(x^2+100\right)^{\frac{1}{2}} \neq 0$) 1
- $x^2 = 50$ dus (omdat $x > 0$) $x = \sqrt{50}$ 1
- Het antwoord: 7,1 (mm) 1

Vraag	Antwoord	Scores

7 **maximumscore 5**

- De totale verlichtingssterkte in P is
$\frac{500}{4\pi}\cdot\frac{25}{\left(25^2+d^2\right)^{\frac{3}{2}}}+\frac{500}{4\pi}\cdot\frac{25}{\left(25^2+(40-d)^2\right)^{\frac{3}{2}}}$ 2
- Beschrijven hoe het maximum 0,074 (of nauwkeuriger) gevonden kan worden 1
- Beschrijven hoe het minimum 0,061 (of nauwkeuriger) gevonden kan worden 1
- Het minimum is 82% (of nauwkeuriger) van het maximum (of: 80% van het maximum is 0,059), dus het deel van het werkoppervlak tussen de spots wordt voldoende gelijkmatig belicht 1

Opmerkingen:

– *De factor* $\frac{500}{4\pi}$ *mag, mits toegelicht, in de berekening buiten beschouwing worden gelaten.*

– *Als wordt aangenomen dat* $E_{\text{totaal}}=2E$, *voor deze vraag geen scorepunten toekennen.*

Buiten en binnen de cirkel

8 **maximumscore 4**

- Uit $MP'\cdot MP=MQ'\cdot MQ$ volgt $\frac{MQ'}{MP'}=\frac{MP}{MQ}$ 2
- $\angle Q'MP'=\angle PMQ$ 1
- Dus de driehoeken $MP'Q'$ en MQP zijn gelijkvormig; *zhz* 1

9 **maximumscore 3**

- De driehoeken $MB'A'$ en MAB zijn gelijkvormig; zie vorige vraag 1
- Hieruit volgt $\angle MB'A'=\angle MAB=90°$ 1
- Dus B' ligt op de cirkel met middellijn MA'; *Thales* 1

Vraag	Antwoord	Scores

Getransformeerde grafiek

10 maximumscore 3

- $AP = \ln\left(p^2+1\right)-1$ en $BP = 1-\ln\left(\dfrac{e^2}{p^2+1}\right)$ 1
- $BP = 1-\left(\ln\left(e^2\right)-\ln\left(p^2+1\right)\right)$ 1
- $BP = 1-2+\ln\left(p^2+1\right) = \ln\left(p^2+1\right)-1\ (= AP)$ 1

of

- De y-coördinaat van het midden van lijnstuk AB is $\dfrac{f(p)+g(p)}{2}$ 1
- $\dfrac{f(p)+g(p)}{2} = \dfrac{\ln\left(p^2+1\right)+\ln\left(\dfrac{e^2}{p^2+1}\right)}{2} = \dfrac{\ln\left(p^2+1\right)+2-\ln\left(p^2+1\right)}{2}$ (of $\dfrac{\ln\left(e^2\right)}{2}$) 1
- $\dfrac{f(p)+g(p)}{2} = \dfrac{2}{2} = 1$, dus het midden van lijnstuk AB is P, dus $AP = BP$ 1

11 maximumscore 5

- (Vanwege de symmetrie in de lijn met vergelijking $y = 1$ geldt) de inhoud is gelijk aan $2\cdot\pi\int_0^1 x^2\,dy$, met $y = \ln\left(x^2+1\right)$ 2
- $y = \ln\left(x^2+1\right)$ herleiden tot $x^2 = e^y - 1$ 1
- Een primitieve van $e^y - 1$ is $e^y - y$ 1
- De inhoud is $2\pi(e-2)$ 1

Vraag	Antwoord	Scores

12 maximumscore 8

- Een vergelijking van de verschoven grafiek is $y = \ln\left((x-2)^2+1\right)$ 1
- Voor de x-coördinaat van het snijpunt geldt $x^2+1=(x-2)^2+1$ 1
- Hieruit volgt $x=1$ 1
- $f'(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$ 1
- De richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan de grafiek van f in het snijpunt is $f'(1)=1$ 1
- De richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan de verschoven grafiek is $f'(-1)=-1$ (of $\dfrac{2(1-2)}{(1-2)^2+1}=-1$) 2
- Het product van de richtingscoëfficiënten is -1 (dus de grafieken snijden elkaar loodrecht) 1

of

- Een vergelijking van de verschoven grafiek is $y = \ln\left((x-2)^2+1\right)$ 1
- Voor de x-coördinaat van het snijpunt geldt $x^2+1=(x-2)^2+1$ 1
- Hieruit volgt $x=1$ 1
- $f'(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$ 1
- De richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan de grafiek van f in het snijpunt is $f'(1)=1$ 1
- De afgeleide die hoort bij de verschoven grafiek is $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{2(x-2)}{(x-2)^2+1}$ (of een gelijkwaardige uitdrukking) 1
- De richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan de verschoven grafiek is $\dfrac{2(1-2)}{(1-2)^2+1}=-1$ 1
- Het product van de richtingscoëfficiënten is -1 (dus de grafieken snijden elkaar loodrecht) 1

of

Vraag	Antwoord	Scores

- $f(-x)=\ln((-x)^2+1)=f(x)$ (voor elke waarde van x) 2
- Uit de verschuiving (en de symmetrie) volgt $x=1$ 1
- $f'(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$ 1
- De richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan de grafiek van f in het snijpunt is $f'(1)=1$ 1
- De richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan de verschoven grafiek is $f'(-1)=-1$ (of $\dfrac{2(1-2)}{(1-2)^2+1}=-1$) 2
- Het product van de richtingscoëfficiënten is -1 (dus de grafieken snijden elkaar loodrecht) 1

Droogligtijd

13 maximumscore 4

- De vergelijking $125\cos\left(\frac{2\pi}{745}t\right)=40$ moet worden opgelost 1
- Beschrijven hoe deze vergelijking opgelost kan worden 1
- $t_1\approx 147{,}6$ en $t_2\approx 597{,}4$ 1
- Het antwoord: 450 (minuten) 1

14 maximumscore 5

- Op $t=t_1$ is $h=z$, dus $z=125\cos\left(\frac{2\pi}{745}t_1\right)$ 1
- Een redenering waaruit volgt dat $t_1=\frac{745}{2}-\frac{1}{2}D$ 2
- Substitutie van $t_1=\frac{745}{2}-\frac{1}{2}D$ in $z=125\cos\left(\frac{2\pi}{745}t_1\right)$ geeft $z=125\cos\left(\frac{2\pi}{745}\left(\frac{745}{2}-\frac{1}{2}D\right)\right)$ 1
- Hieruit volgt $z=125\cos\left(\pi-\frac{\pi}{745}D\right)$ 1

15 maximumscore 5

- Voor de formule van de grafiek van figuur 2 geldt $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}D}=-125\sin\left(\pi-\frac{\pi}{745}D\right)\cdot-\frac{\pi}{745}$ 1
- $D=372{,}5$ geeft $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}D}=\frac{125\pi}{745}$ (of (ongeveer) 0,53) 1
- Dus de helling bij de grafiek van figuur 3 is $\frac{745}{125\pi}\approx 1{,}9$ 1
- Voor de formule van de grafiek van figuur 4 geldt $\dfrac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}z}=2{,}4\cdot 10^{-4}z^2+1{,}7$ (of een gelijkwaardige uitdrukking) 1
- De helling bij de grafiek van figuur 4 voor $z=0$ is $1{,}7$ 1

Vraag	Antwoord	Scores

Driehoek, cirkel en koordenvierhoek

16 maximumscore 4

- $\angle A = \angle BDE$; *F-hoeken* 1
- $\angle BDE = \angle DFE$; *hoek tussen koorde en raaklijn* 1
- $\angle CFD = 180° - \angle DFE$; *gestrekte hoek* 1
- $\angle A + \angle CFD = \angle A + 180° - \angle A = 180°$, dus vierhoek *ADFC* is een koordenvierhoek (; *koordenvierhoek*) 1

of

- $\angle ADF = \angle DEF$; *hoek tussen koorde en raaklijn* 1
- $\angle ACB = \angle DEB$; *F-hoeken* 1
- $\angle DEF + \angle DEB = 180°$; *gestrekte hoek* 1
- $\angle ADF + \angle ACF = \angle DEF + \angle DEB = 180°$, dus vierhoek *ADFC* is een koordenvierhoek (; *koordenvierhoek*) 1