Formules

Vlakke meetkunde

Verwijzingen naar definities en stellingen die bij een bewijs mogen worden gebruikt zonder nadere toelichting.

Hoeken, lijnen en afstanden:
gestrekte hoek, rechte hoek, overstaande hoeken, F-hoeken, Z-hoeken, afstand punt tot lijn, driehoeksongelijkheid.

Meetkundige plaatsen:
middelloodlijn, bissectrice, bissectricepaar, middenparallel, cirkel, parabool.

Driehoeken:
hoekensom driehoek, buitenhoek driehoek, congruentie: HZH, ZHH, ZHZ, ZZZ, ZZR; gelijkvormigheid: hh, zhz, zzz, zzr; middelloodlijnen driehoek, bissectrices driehoek, hoogtelijn driehoek, hoogtelijnen driehoek, zwaartelijn driehoek, zwaartelijnen driehoek, gelijkbenige driehoek, gelijkzijdige driehoek, rechthoekige driehoek, Pythagoras, gelijkbenige rechthoekige driehoek, halve gelijkzijdige driehoek.

Vierhoeken:
hoekensom vierhoek, parallellogram, ruit, rechthoek, vierkant.

Cirkel, koorden, bogen, hoeken, raaklijn, vierhoeken:
koorde, boog en koorde, loodlijn op koorde, middellijn, Thales, middelpuntshoek, omtrekshoek, constante hoek, raaklijn, hoek tussen koorde en raaklijn, koordenvierhoek.

Goniometrie

$$\sin(t+u)=\sin(t)\cos(u)+\cos(t)\sin(u) \qquad \sin(t)+\sin(u)=2\sin\left(\tfrac{t+u}{2}\right)\cos\left(\tfrac{t-u}{2}\right)$$

$$\sin(t-u)=\sin(t)\cos(u)-\cos(t)\sin(u) \qquad \sin(t)-\sin(u)=2\sin\left(\tfrac{t-u}{2}\right)\cos\left(\tfrac{t+u}{2}\right)$$

$$\cos(t+u)=\cos(t)\cos(u)-\sin(t)\sin(u) \qquad \cos(t)+\cos(u)=2\cos\left(\tfrac{t+u}{2}\right)\cos\left(\tfrac{t-u}{2}\right)$$

$$\cos(t-u)=\cos(t)\cos(u)+\sin(t)\sin(u) \qquad \cos(t)-\cos(u)=-2\sin\left(\tfrac{t+u}{2}\right)\sin\left(\tfrac{t-u}{2}\right)$$

Kettinglijn

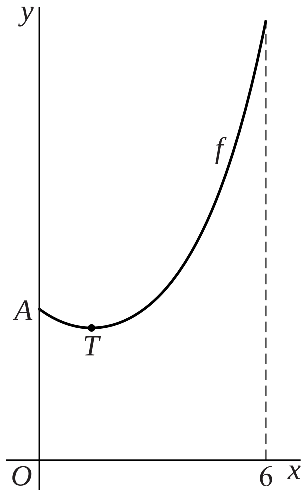
De functie f is gegeven door

$$f(x)=\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x}+2e^{-\frac{1}{2}x}+1\frac{1}{2}.$$

In figuur 1 is de grafiek van f, een zogenaamde kettinglijn, op het domein $[0,6]$ getekend.

Punt T is het laagste punt van de grafiek en punt A is het gemeenschappelijke punt van de grafiek met de y-as.

figuur 1

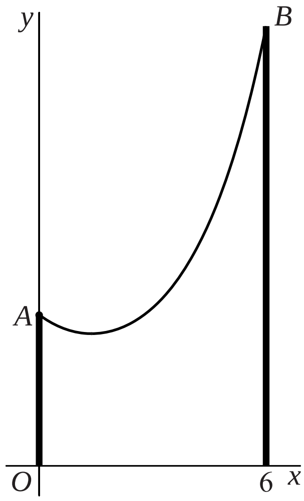


De x-coördinaat van T is ongeveer 1,4.

4p **1** Bereken exact de waarde van de x-coördinaat van T.

Aan twee verticale palen met bevestigingspunten A en B is een flexibele, niet elastische kabel opgehangen. Door het eigen gewicht hangt de kabel in de vorm van een kettinglijn.
In figuur 2 is deze situatie in een assenstelsel getekend. De x-as valt samen met de grond.
De getekende kettinglijn is de grafiek van de functie f op het domein $[0,6]$.

figuur 2

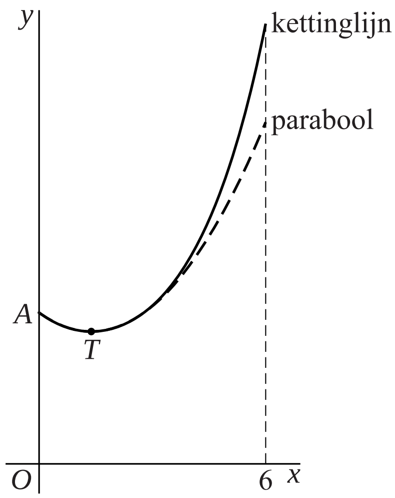


De kabel schiet los bij punt A.

5p **2** Onderzoek of de loshangende kabel de grond raakt.

In figuur 3 zijn de grafiek van de functie f en de parabool door A met top T getekend.
In deze figuur is te zien dat de parabool de kettinglijn aanvankelijk goed benadert, maar dat voor grotere waarden van x de benadering minder goed wordt.
Van de parabool door A met top T kan een vergelijking van de vorm $y = a(x-b)^2 + c$ worden opgesteld.

figuur 3

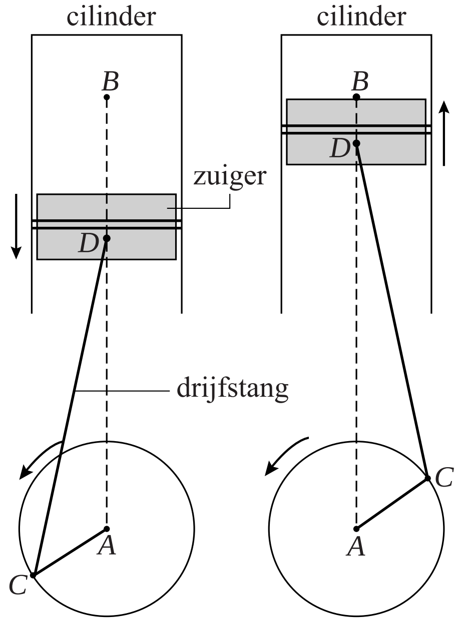


6p **3** Bereken de waarde van x waarvoor het (verticale) hoogteverschil tussen de kettinglijn en deze parabool gelijk is aan 1. Rond je antwoord af op één decimaal.

Automotor

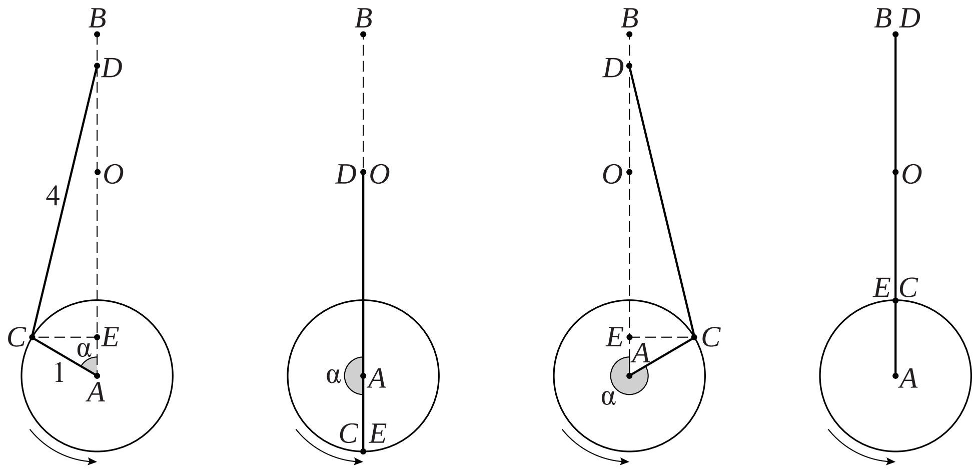
In een automotor wordt de op- en neergaande beweging van een zuiger via een drijfstang omgezet in een draaiende beweging. In figuur 1 zijn twee standen getekend. In de eerste stand beweegt de zuiger omlaag en in de tweede stand omhoog.

figuur 1



In figuur 2 zijn vier standen schematisch getekend. A is een vast punt, D beweegt verticaal over AB en C draait over een cirkel met straal 1 en middelpunt A waarbij CD een vaste lengte 4 heeft.
De grootte van hoek CAD (in radialen) noemen we α. Punt E is de loodrechte projectie van C op lijn AD.

figuur 2



Punt D beweegt op en neer tussen zijn hoogste punt B ($\alpha = 0$ en $\alpha = 2\pi$) en zijn laagste punt O ($\alpha = \pi$).

De afstand van D tot B noemen we s.
s hangt af van α. Er geldt: $s = 5 - \cos(\alpha) - \sqrt{16 - \sin^2(\alpha)}$, met $0 \leq \alpha \leq 2\pi$.

5p **4** Bewijs dit voor de meest linkse van de in figuur 2 getekende standen (dus voor $0 < \alpha < \frac{1}{2}\pi$).

In de techniek wordt s soms benaderd met behulp van de formule
$z = 1 - \cos(\alpha) + \frac{1}{8}\sin^2(\alpha)$.

Om te onderzoeken of de formule $z = 1 - \cos(\alpha) + \frac{1}{8}\sin^2(\alpha)$ een goede benadering voor s geeft, wordt het maximale verschil tussen s en z berekend.

3p **5** Bereken in drie decimalen nauwkeurig dit maximale verschil.

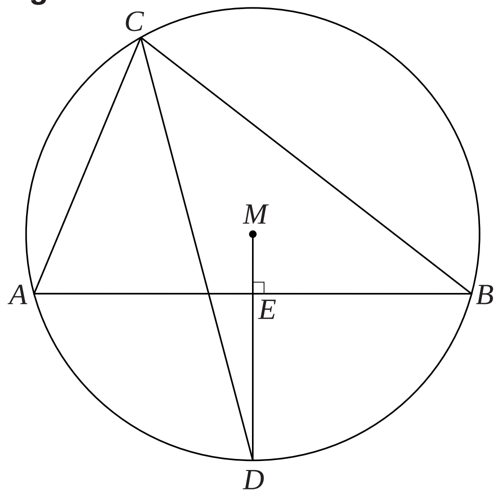
Zowel in B als in O is de snelheid van de zuiger gelijk aan 0. Tijdens de beweging wordt voor een waarde van α, met $0 < \alpha < \pi$, de maximale zuigersnelheid bereikt.

4p **6** Stel een formule voor de afgeleide van z op en bereken hiermee de maximale zuigersnelheid. Rond je antwoord af op twee decimalen.

Omgeschreven cirkel

Punt M is het middelpunt van de omgeschreven cirkel van de scherphoekige driehoek ABC. Op deze cirkel ligt punt D zo dat straal MD zijde AB in punt E loodrecht snijdt. Zie figuur 1. Deze figuur staat ook op de uitwerkbijlage.

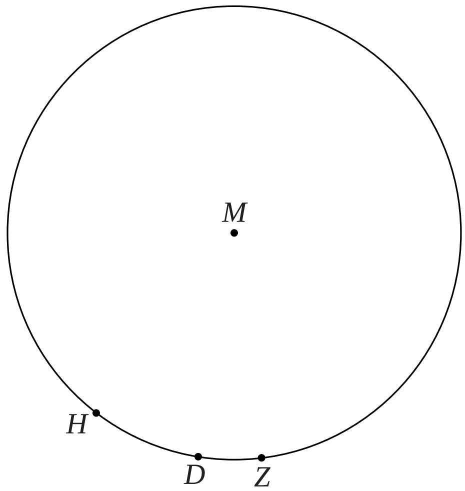
figuur 1



4p **7** Bewijs dat CD de bissectrice van hoek ACB is.

In figuur 2 is de omgeschreven cirkel getekend van een andere driehoek ABC. Op deze cirkel met middelpunt M liggen de punten H, D en Z.

figuur 2



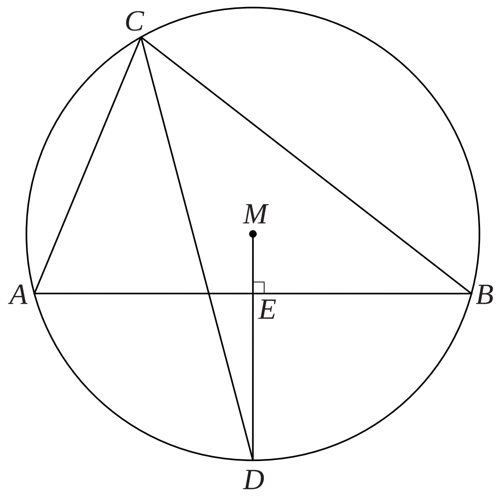
Voor driehoek ABC geldt:

– D ligt zodanig op de cirkel dat MD loodrecht staat op AB;
– H is het snijpunt van het verlengde van de hoogtelijn vanuit C met de cirkel;
– Z is het snijpunt van de lijn door C en het snijpunt E van MD en AB met de cirkel.

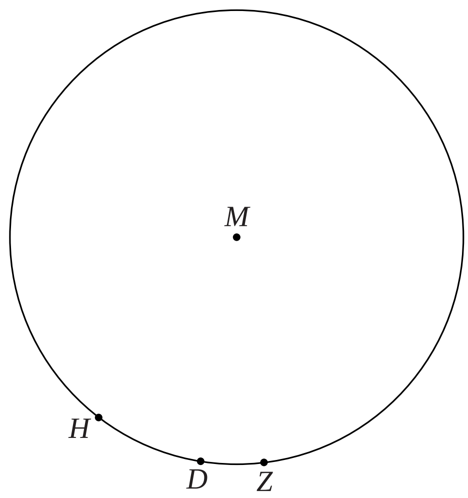
4p **8** Teken driehoek ABC in de figuur op de uitwerkbijlage. Licht je werkwijze toe.

uitwerkbijlage

7



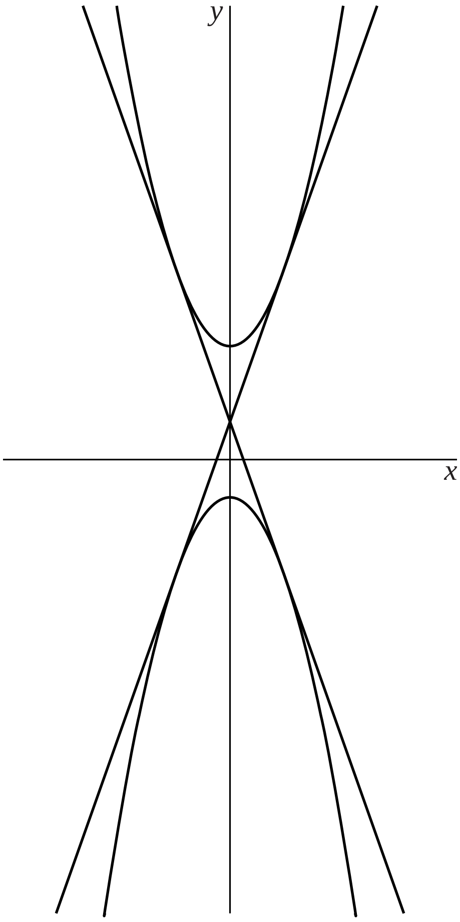
8



Raaklijnen aan twee parabolen

Gegeven zijn de twee parabolen met vergelijkingen $y = x^2 + 3$ en $y = -x^2 - 1$.
Er zijn twee lijnen die aan beide parabolen raken. Deze twee raaklijnen snijden elkaar in het punt dat midden tussen de toppen van de beide parabolen ligt. Zie de figuur.

figuur



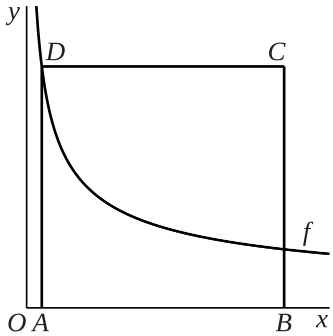
6p **9** Stel met behulp van exacte berekeningen van beide raaklijnen een vergelijking op.

Vierkant bij een grafiek

De functie f is gegeven door $f(x) = \frac{16}{\sqrt{x}}$.

Van vierkant $ABCD$ liggen de hoekpunten A en B op de x-as en het hoekpunt D op de grafiek van f. Zie figuur 1.

figuur 1



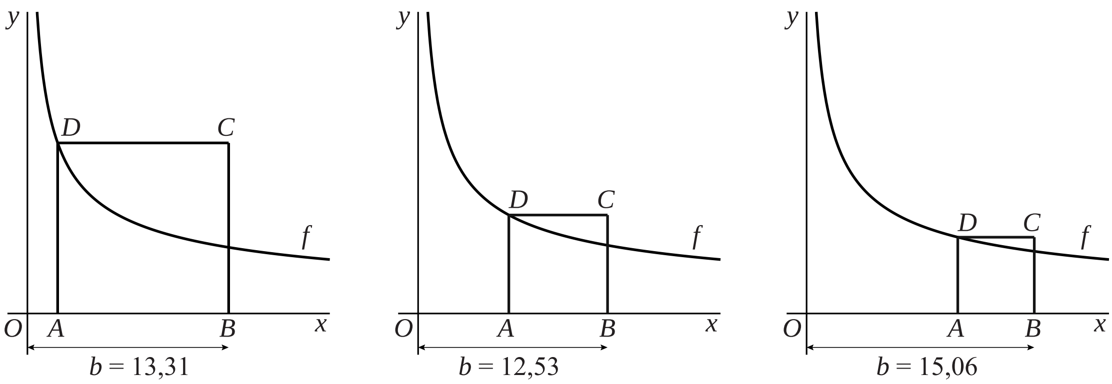
De x-coördinaten van A en B noemen we respectievelijk a en b, met $0 < a < b$. De coördinaten van D zijn dan $(a, \frac{16}{\sqrt{a}})$.

Voor $a = 1$ ontstaat het vierkant met zijde 16.
V is het deel van dit vierkant dat zich boven de grafiek bevindt.
Vlakdeel V wordt gewenteld om de x-as.

5p **10** Bereken exact de inhoud van het bijbehorende omwentelingslichaam.

In figuur 2 zijn enkele mogelijke situaties voor vierkant $ABCD$ getekend.

figuur 2



Bij de getekende situaties is de afstand van punt B tot de oorsprong aangegeven. Deze afstand b hangt af van a, de x-coördinaat van A. Als a vanaf 0 toeneemt, neemt b eerst af en vervolgens weer toe. Er is dus een waarde van a waarvoor b minimaal is.

5p **11** Druk b uit in a en bereken vervolgens exact deze minimale waarde van b.

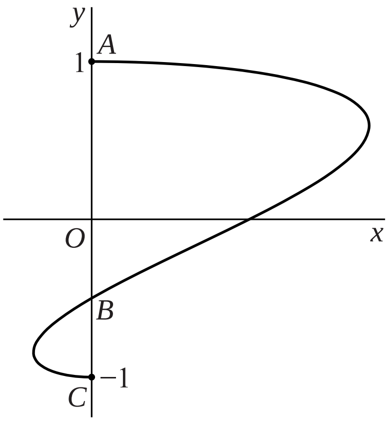
Snelheid op een baan

Voor $0 \leq t \leq \pi$ is de baan van het punt P gegeven door de volgende bewegingsvergelijkingen:

$$\begin{cases} x(t) = \sin(2t) + \sin(t) \\ y(t) = \cos(t) \end{cases}$$

In de figuur is de baan van P weergegeven.

figuur



Op $t = 0$ bevindt P zich in het hoogste punt $A(0,1)$ van de baan.
Op $t = \pi$ bevindt P zich in het laagste punt $C(0,-1)$ van de baan.
Tussen $t = 0$ en $t = \pi$ snijdt de baan de y-as één keer in het punt B.

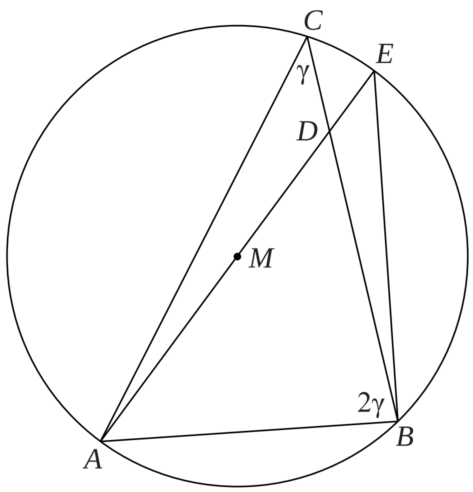
De snelheid van P op tijdstip t is $\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2}$.

7p **12** Bereken exact de snelheid van P in punt B.

Driehoek met dubbele hoek

Gegeven is een driehoek ABC, waarbij hoek B twee keer zo groot is als hoek C. Het middelpunt M van de omgeschreven cirkel van driehoek ABC ligt binnen deze driehoek. Middellijn AE snijdt zijde BC in punt D.
Zie figuur 1.
Figuur 1 staat ook op de uitwerkbijlage.

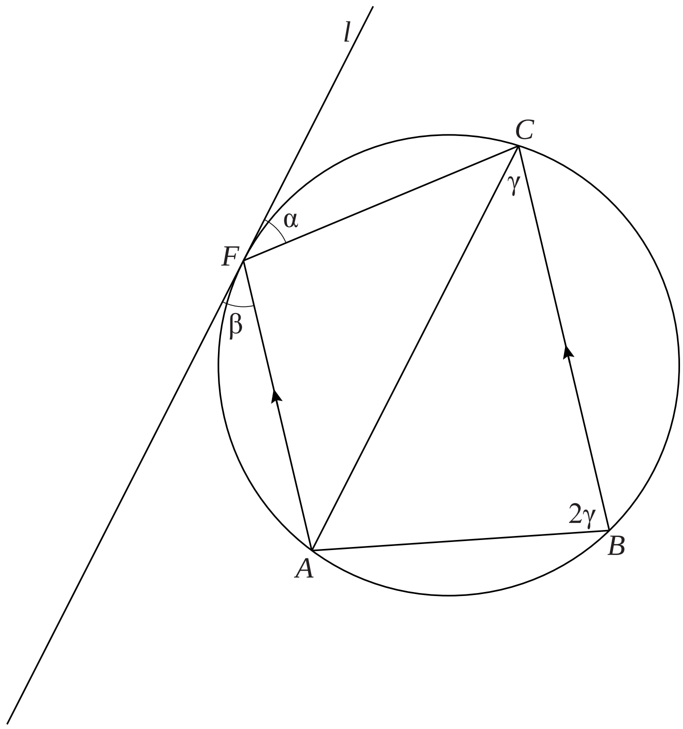
figuur 1



4p **13** Bewijs dat driehoek ABD gelijkbenig is.

In figuur 2 is opnieuw de driehoek ABC getekend met zijn omgeschreven cirkel. De lijn door A evenwijdig met zijde BC snijdt de cirkel behalve in A ook in punt F.
Lijn l raakt de cirkel in F. De hoek tussen l en lijnstuk CF is α en de hoek tussen l en lijnstuk AF is β.
Figuur 2 staat ook op de uitwerkbijlage.

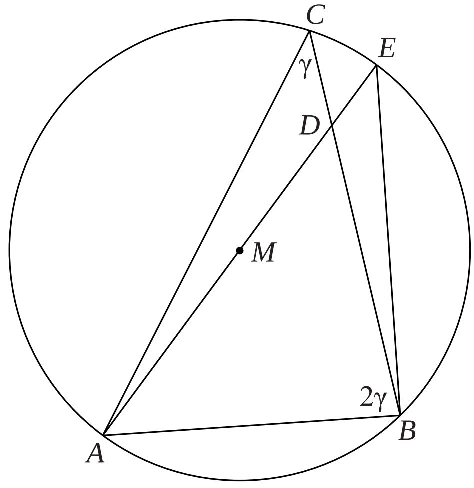
figuur 2



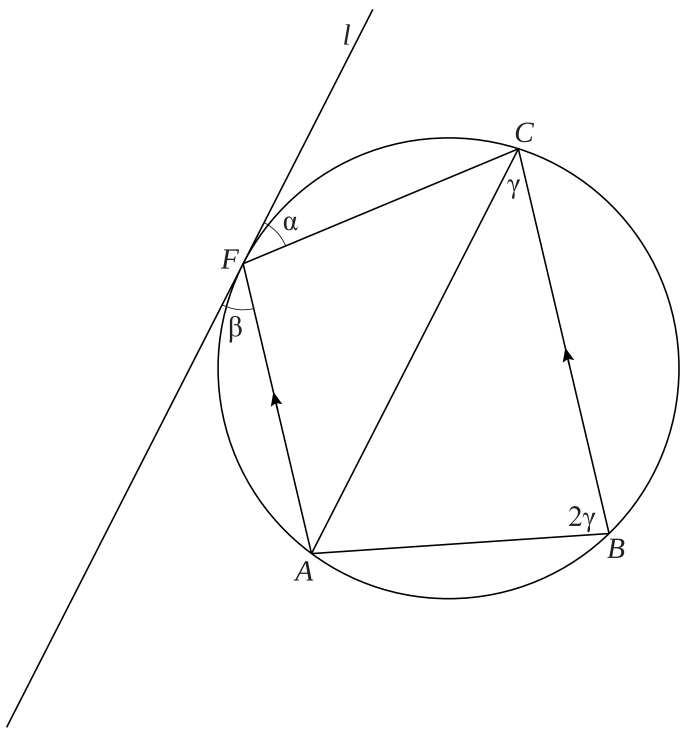
5p **14** Bewijs dat l evenwijdig is aan AC.

uitwerkbijlage

13



14

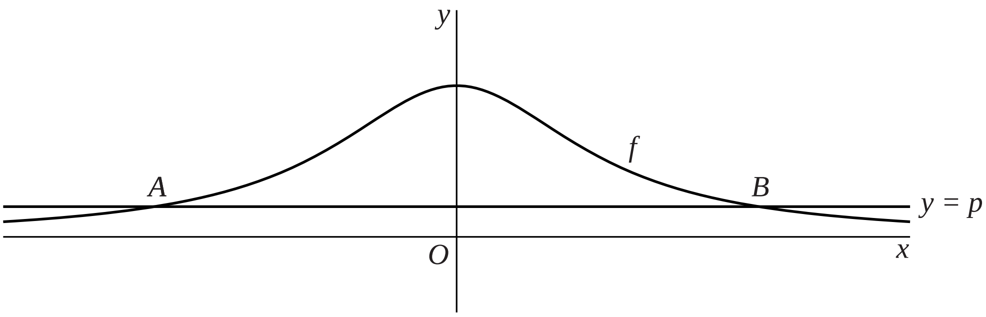


De kromme van Agnesi

De functie f is gegeven door $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$.

De grafiek van deze functie is onder andere bestudeerd door de Italiaanse wiskundige Maria Agnesi (1718-1799).
In figuur 1 is de grafiek van f weergegeven. De top van de grafiek is $(0, 1)$. Ook is voor een zekere waarde van p, met $0 < p < \frac{1}{2}$, de lijn met vergelijking $y = p$ weergegeven. Deze lijn snijdt de grafiek van f in twee punten A en B.

figuur 1

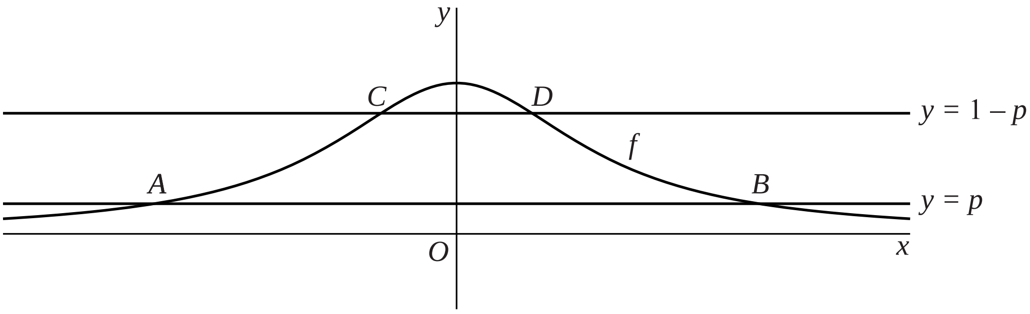


De lengte van lijnstuk AB is $2\sqrt{\frac{1}{p}-1}$.

3p **15** Bewijs dit.

In figuur 2 zijn opnieuw de grafiek van f en de lijn met vergelijking $y = p$, met $0 < p < \frac{1}{2}$, weergegeven. Ook is de lijn met vergelijking $y = 1 - p$ weergegeven. Deze lijn snijdt de grafiek van f in twee punten C en D.

figuur 2



Er geldt: $AB \cdot CD = 4$

4p **16** Bewijs dit.

De grafiek van f_a ontstaat uit de grafiek van f door twee transformaties: een vermenigvuldiging van de grafiek van f ten opzichte van de x-as met een positieve factor a en vervolgens een vermenigvuldiging van de zo verkregen grafiek ten opzichte van de y-as met dezelfde factor a.

3p **17** Stel een functievoorschrift op voor f_a. Schrijf je antwoord als één breuk.