| Vraag | Antwoord | Scores |
|---|---|---|

## Kettinglijn

**1 maximumscore 4**

- $f'(x) = \frac{1}{4}e^{\frac{1}{2}x} - e^{-\frac{1}{2}x}$ — 1
- $f'(x) = 0$ geeft $\frac{1}{4}e^{\frac{1}{2}x} = e^{-\frac{1}{2}x}$ — 1
- Hieruit volgt $e^x = 4$ — 1
- Dus $x = \ln(4)$ (of een gelijkwaardige uitdrukking) — 1

**2 maximumscore 5**

- De hoogte van $B$ is $f(6) \approx 11{,}6$ (of nauwkeuriger) — 1
- De lengte van de kabel is gelijk aan $\int_0^6 \sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx$ — 1
- Beschrijven hoe deze integraal (met de GR) kan worden berekend — 1
- De lengte van de kabel is 11,4 (of nauwkeuriger) — 1
- ($11{,}4 < 11{,}6$ dus) de kabel raakt de grond niet — 1

*Opmerking*
*Als de kandidaat een bij de vorige vraag foutief berekende afgeleide heeft gebruikt, hiervoor geen scorepunten in mindering brengen.*

**3 maximumscore 6**

- De $y$-coördinaat van $T$ is $3\frac{1}{2}$ (of 3,5) — 1
- De formule voor de parabool is van de vorm $y = a(x-\ln(4))^2 + 3\frac{1}{2}$ (of $y = a(x-1{,}4)^2 + 3{,}5$) — 1
- De $y$-coördinaat van $A$ is 4 — 1
- Invullen van $(0, 4)$ in $y = a(x-\ln(4))^2 + 3\frac{1}{2}$ (of $y = a(x-1{,}4)^2 + 3{,}5$) geeft $a = \dfrac{1}{2\ln^2(4)}$ (of $a \approx 0{,}255$) — 1
- Beschrijven hoe de vergelijking $\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x} + 2e^{-\frac{1}{2}x} + 1\frac{1}{2} - \left(\dfrac{1}{2\ln^2(4)}(x-\ln(4))^2 + 3\frac{1}{2}\right) = 1$ (of $\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x} + 2e^{-\frac{1}{2}x} + 1\frac{1}{2} - \left(0{,}255(x-1{,}4)^2 + 3{,}5\right) = 1$) met de GR kan worden opgelost — 1
- Het antwoord: $x \approx 5{,}1$ (of $x \approx 5{,}0$) — 1

| Vraag | Antwoord | Scores |
|---|---|---|

## Automotor

**4 maximumscore 5**

- $AB = 5$ 1
- $AE = \cos(\alpha)$ 1
- $CE = \sin(\alpha)$, dus (met de stelling van Pythagoras in driehoek *ECD*) $ED = \sqrt{16 - \sin^2(\alpha)}$ 2
- $s = AB - AE - ED = 5 - \cos(\alpha) - \sqrt{16 - \sin^2(\alpha)}$ 1

**5 maximumscore 3**

- $|s - z| = \left|5 - \cos(\alpha) - \sqrt{16 - \sin^2(\alpha)} - (1 - \cos(\alpha) + \frac{1}{8}\sin^2(\alpha))\right|$ 1
- Beschrijven hoe het maximum van $|s - z|$ met de GR kan worden berekend 1
- Het maximale verschil is 0,002 1

*Opmerking*
*Als zonder expliciet gebruik van de notatie van de absolute waarde het goede antwoord gevonden wordt, hiervoor geen scorepunten in mindering brengen.*

**6 maximumscore 4**

- $z'(\alpha) = \sin(\alpha) + \frac{1}{4}\sin(\alpha)\cos(\alpha)$ (of een gelijkwaardige uitdrukking) 2
- Beschrijven hoe het maximum van $z'(\alpha)$ gevonden kan worden (of een aanpak waarbij $z''(\alpha) = 0$ opgelost wordt) 1
- Het gevraagde antwoord is 1,03 1

| Vraag | Antwoord | Scores |
|---|---|---|

## Omgeschreven cirkel

**7 maximumscore 4**

- $E$ is het midden van $AB$; *loodlijn op koorde* 1
- $MD$ staat loodrecht op $AB$ en gaat door het midden van $AB$, dus $MD$ is de middelloodlijn van $AB$ (; *middelloodlijn*) 1
- $D$ ligt op de middelloodlijn van $AB$, dus $AD = BD$ 1
- Dus $\angle ACD = \angle BCD$; *boog en koorde* (dus $CD$ is bissectrice van $\angle ACB$) 1

of

- $E$ is het midden van $AB$; *loodlijn op koorde* 1
- ($AE = EB$,) $ED = ED$ en $\angle AED = \angle BED$, dus $\Delta AED \cong \Delta BED$; *ZHZ* 1
- Hieruit volgt $AD = BD$ 1
- Dus $\angle ACD = \angle BCD$; *boog en koorde* (dus $CD$ is bissectrice van $\angle ACB$) 1

of

- $E$ is het midden van $AB$; *loodlijn op koorde* 1
- ($AE = EB$,) $ED = ED$ en $\angle AED = \angle BED$, dus $\Delta AED \cong \Delta BED$; *ZHZ* 1
- $\angle ACD = \angle ABD$ en $\angle BCD = \angle BAD$; *constante hoek* 1
- $\angle ABD = \angle BAD$, dus $\angle ACD = \angle BCD$ (dus $CD$ is bissectrice van $\angle ACB$) 1

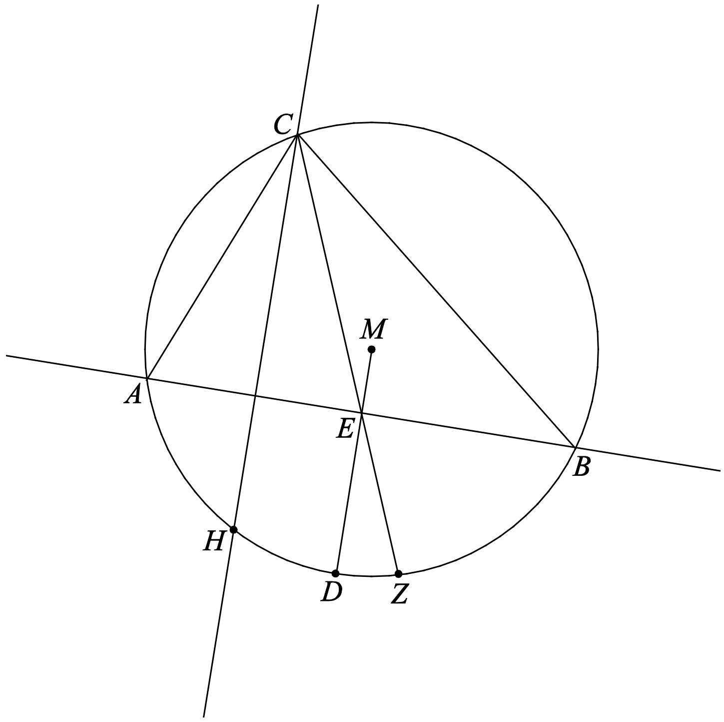
of

- $AM = BM$ (; *cirkel*) 1
- ($AM = BM$,) $EM = EM$ en $\angle AEM = \angle BEM = 90°$, dus $\Delta AEM \cong \Delta BEM$; *ZZR* 1
- Hieruit volgt $\angle AMD = \angle BMD$, dus $\frac{1}{2}\angle AMD = \frac{1}{2}\angle BMD$ 1
- $\frac{1}{2}\angle AMD = \angle ACD$ en $\frac{1}{2}\angle BMD = \angle BCD$; *omtrekshoek*, dus $\angle ACD = \angle BCD$ (dus $CD$ is bissectrice van $\angle ACB$) 1

| Vraag | Antwoord | Scores |
|---|---|---|

**8 maximumscore 4**

- Het tekenen van de lijn door *H*, evenwijdig aan *MD*; deze lijn snijdt de cirkel in *C* 1
- Het tekenen van lijn *CZ*; deze lijn snijdt *MD* in *E* 1
- Het tekenen van de lijn door *E*, loodrecht op *MD*; deze lijn snijdt de cirkel in *A* en *B* 1
- Het tekenen van driehoek *ABC* 1




*Opmerking*
*Als A en B van plaats gewisseld zijn, hiervoor geen scorepunten in mindering brengen.*

| Vraag | Antwoord | Scores |
|---|---|---|

## Raaklijnen aan twee parabolen

**9 maximumscore 6**

| | |
|---|---|
| • De toppen van de parabolen zijn $(0, -1)$ en $(0, 3)$, dus de raaklijnen gaan door het punt $(0, 1)$ | 1 |
| • Voor de $x$-coördinaten van de raakpunten moet gelden $f\,'(x) = \dfrac{f(x) - 1}{x}$, waarbij $f(x) = x^2 + 3$ (of $f(x) = -x^2 - 1$) | 1 |
| • Dit geeft $2x = \dfrac{x^2 + 2}{x}$ | 1 |
| • $x = \sqrt{2}$ of $x = -\sqrt{2}$ | 1 |
| • Vergelijkingen van de raaklijnen zijn $y = -2\sqrt{2} \cdot x + 1$ en $y = 2\sqrt{2} \cdot x + 1$ | 2 |

of

| | |
|---|---|
| • De toppen van de parabolen zijn $(0, -1)$ en $(0, 3)$, dus de raaklijnen gaan door het punt $(0, 1)$ (en zijn dus van de vorm $y = ax + 1$) | 1 |
| • In het raakpunt van de raaklijn en de dalparabool zijn de hellingen gelijk, dus voor de $x$-coördinaat van het raakpunt geldt $a = 2x$, ofwel $x = \frac{1}{2}a$ | 1 |
| • Het raakpunt ligt op de raaklijn, dus $y = a \cdot \frac{1}{2}a + 1 = \frac{1}{2}a^2 + 1$ | 1 |
| • Het raakpunt ligt op de dalparabool, dus $y = \left(\frac{1}{2}a\right)^2 + 3 = \frac{1}{4}a^2 + 3$ | 1 |
| • $\frac{1}{2}a^2 + 1 = \frac{1}{4}a^2 + 3$ geeft $a = \sqrt{8}$ of $a = -\sqrt{8}$ | 1 |
| • Vergelijkingen van de raaklijnen zijn $y = \sqrt{8} \cdot x + 1$ en $y = -\sqrt{8} \cdot x + 1$ | 1 |

of

| | |
|---|---|
| • De toppen van de parabolen zijn $(0, -1)$ en $(0, 3)$, dus de raaklijnen gaan door het punt $(0, 1)$ (en zijn dus van de vorm $y = ax + 1$) | 1 |
| • De lijn $y = ax + 1$ is raaklijn aan de parabool $y = x^2 + 3$ als de discriminant van de vergelijking $x^2 + 3 = ax + 1$ gelijk aan 0 is | 1 |
| • Daaruit volgt $a^2 - 8 = 0$ | 2 |
| • Dit geeft $a = \sqrt{8}$ of $a = -\sqrt{8}$ | 1 |
| • Vergelijkingen van de raaklijnen zijn $y = \sqrt{8} \cdot x + 1$ en $y = -\sqrt{8} \cdot x + 1$ | 1 |

of

| Vraag | Antwoord | Scores |
|---|---|---|

- De lijn $y = ax + b$ is raaklijn aan de parabool $y = x^2 + 3$ als de discriminant van de vergelijking $x^2 + 3 = ax + b$ gelijk aan 0 is 1
- Daaruit volgt $a^2 - 4(3 - b) = 0$ 1
- Evenzo leidt het nul stellen van de discriminant van de vergelijking $-x^2 - 1 = ax + b$ tot $a^2 - 4(b + 1) = 0$ 1
- Uit deze twee vergelijkingen volgt $b = 1$ en $a^2 = 8$ 1
- Dit geeft $a = \sqrt{8}$ of $a = -\sqrt{8}$ 1
- Vergelijkingen van de raaklijnen zijn $y = \sqrt{8} \cdot x + 1$ en $y = -\sqrt{8} \cdot x + 1$ 1

of

- De raakpunten zijn $(p, p^2 + 3)$ en $(-p, -p^2 - 1)$ (voor zekere waarden van $p$) 1
- De lijn door deze punten heeft richtingscoëfficiënt $\dfrac{2p^2 + 4}{2p}$ 1
- (Met de afgeleide vinden we:) de helling in de raakpunten is $2p$ 1
- $\dfrac{2p^2 + 4}{2p} = 2p$ geeft $p = -\sqrt{2}$ of $p = \sqrt{2}$ 1
- Vergelijkingen van de raaklijnen zijn $y = -2\sqrt{2} \cdot x + 1$ en $y = 2\sqrt{2} \cdot x + 1$ 2

| Vraag | Antwoord | Scores |
|---|---|---|

## Vierkant bij een grafiek

**10 maximumscore 5**

- De inhoud kan worden berekend met behulp van de integraal
  $\pi \cdot \int \left(16^2 - \left(\frac{16}{\sqrt{x}}\right)^2\right) \mathrm{d}x$ 2
- De grenzen zijn 1 en 17 1
- Een primitieve van $256 - \frac{256}{x}$ is (voor $x > 0$) $256x - 256\ln(x)$ 1
- De gevraagde inhoud is $\pi\left(4096 - 256\ln(17)\right)$ (of een gelijkwaardige uitdrukking) 1

of

- De inhoud kan worden berekend met behulp van de integraal
  $\pi \cdot 16^2 \cdot 16 - \pi \cdot \int \left(\frac{16}{\sqrt{x}}\right)^2 \mathrm{d}x$ 2
- De grenzen zijn 1 en 17 1
- Een primitieve van $\frac{256}{x}$ is (voor $x > 0$) $256\ln(x)$ 1
- De gevraagde inhoud is $\pi\left(4096 - 256\ln(17)\right)$ (of een gelijkwaardige uitdrukking) 1

*Opmerking*

*Als de integraal* $\pi \cdot \int \left(16 - \left(\frac{16}{\sqrt{x}}\right)\right)^2 \mathrm{d}x$ *is gebruikt, voor deze vraag maximaal 3 scorepunten toekennen.*

**11 maximumscore 5**

- $AB = AD = \dfrac{16}{\sqrt{a}}$, dus $b = a + \dfrac{16}{\sqrt{a}}$ $(= a + 16a^{-\frac{1}{2}})$ 1
- $\dfrac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}a} = 1 - 8a^{-\frac{3}{2}}$ (of een gelijkwaardige uitdrukking) 1
- $b$ is minimaal als $1 - 8a^{-\frac{3}{2}} = 0$ 1
- Dit geeft $a^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{8}$ 1
- Dus $a = 4$ en $b = 4 + \frac{16}{2} = 12$ 1

| Vraag | Antwoord | Scores |
|---|---|---|

## Snelheid op een baan

**12 maximumscore 7**

- In $B$ geldt $\sin(2t)+\sin(t)=0$ 1
- Dit geeft ( $2\sin(t)\cos(t)+\sin(t)=0$ en dan volgt) $\sin(t)(2\cos(t)+1)=0$ 1
- (In $B$ geldt) $\cos(t)=-\frac{1}{2}$ (en in $A$ en $C$ geldt $\sin(t)=0$ ) 1
- Dus in $B$ geldt $t=\frac{2}{3}\pi$ 1
- $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=2\cos(2t)+\cos(t)$ en $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-\sin(t)$ 2
- In $B$ is de snelheid
  $\sqrt{(2\cos(2\cdot\frac{2}{3}\pi)+\cos(\frac{2}{3}\pi))^2+(-\sin(\frac{2}{3}\pi))^2}$ $(=\sqrt{(-1-\frac{1}{2})^2+(-\frac{1}{2}\sqrt{3})^2})=\sqrt{3}$ 1

of

- In $B$ geldt $\sin(2t)+\sin(t)=0$ 1
- Dit geeft $\sin(2t)(=-\sin(t))=\sin(-t)$, dus $2t=-t+k\cdot 2\pi$ of
  $2t=\pi-(-t)+k\cdot 2\pi$ ($k$ geheel) 1
- $t=k\cdot\frac{2}{3}\pi$ of $t=\pi+k\cdot 2\pi$ ($k$ geheel) 1
- Dus in $B$ geldt $t=\frac{2}{3}\pi$ 1
- $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=2\cos(2t)+\cos(t)$ en $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-\sin(t)$ 2
- In $B$ is de snelheid
  $\sqrt{(2\cos(2\cdot\frac{2}{3}\pi)+\cos(\frac{2}{3}\pi))^2+(-\sin(\frac{2}{3}\pi))^2}$ $(=\sqrt{(-1-\frac{1}{2})^2+(-\frac{1}{2}\sqrt{3})^2})=\sqrt{3}$ 1

| Vraag | Antwoord | Scores |
|---|---|---|

## Driehoek met dubbele hoek

**13 maximumscore 4**

- $\angle ACB = \angle AEB$; *constante hoek* 1
- $\angle ABE = 90°$; *Thales* 1
- $\angle BAD = 180° - \angle ABE - \angle AEB = 180° - 90° - \gamma = 90° - \gamma$; *hoekensom driehoek* 1
- $\angle BDA = 180° - \angle BAD - \angle ABD = 180° - (90° - \gamma) - 2\gamma = 90° - \gamma = \angle BAD$ (dus driehoek *ABD* is gelijkbenig); *hoekensom driehoek* (; *gelijkbenige driehoek*) 1

of

- $\angle ACB = \angle AEB$; *constante hoek* 1
- $\angle DBE = 90° - 2\gamma$; *Thales* 1
- $\angle ADB = 90° - \gamma$; *buitenhoek driehoek* 1
- $\angle BAD = 90° - \gamma$; *hoekensom driehoek* (dus driehoek *ABD* is gelijkbenig) 1

of

- $\angle AMB = 2 \cdot \angle ACB$; *omtrekshoek* 1
- Ook $\angle ABC = 2 \cdot \angle ACB$, dus $\angle AMB = \angle ABC$ 1
- Verder geldt $\angle BAM = \angle DAB$, dus $\Delta AMB \sim \Delta ABD$; *hh* 1
- Wegens $MA = MB$ is driehoek *AMB* gelijkbenig, dus driehoek *ABD* is ook gelijkbenig (; *gelijkbenige driehoek*) 1

**14 maximumscore 5**

- $\angle CAF = \angle ACB = \gamma$; *Z-hoeken* 1
- $\alpha = \angle CAF = \gamma$; *hoek tussen koorde en raaklijn* 1
- $\angle AFC = 180° - \angle ABC = 180° - 2\gamma$; *koordenvierhoek* 1
- $\beta = 180° - \angle AFC - \alpha = 180° - (180° - 2\gamma) - \gamma = \gamma$; *gestrekte hoek* 1
- $\angle CAF = \beta$, dus $l$ is evenwijdig aan *AC*; *Z-hoeken* 1

of

- $\angle CAF = \angle ACB = \gamma$; *Z-hoeken* 1
- $\angle AFC = 180° - \angle ABC = 180° - 2\gamma$; *koordenvierhoek* 1
- $\angle ACF = (180° - \gamma - (180° - 2\gamma) =)\ \gamma$; *hoekensom driehoek* 1
- $\beta = \gamma$; *hoek tussen koorde en raaklijn* 1
- $\angle CAF = \beta$, dus $l$ is evenwijdig aan *AC*; *Z-hoeken* 1

| Vraag | Antwoord | Scores |
|---|---|---|

## De kromme van Agnesi

**15 maximumscore 3**

- $\dfrac{1}{x^2+1}=p$ geeft $x^2+1=\frac{1}{p}$ — 1
- Dit geeft $x^2=\frac{1}{p}-1$, dus $x=\sqrt{\frac{1}{p}-1}$ of $x=-\sqrt{\frac{1}{p}-1}$ — 1
- Dus $AB=2\cdot\sqrt{\frac{1}{p}-1}$ — 1

*Opmerking*
*Als de oplossing $x=-\sqrt{\frac{1}{p}-1}$ niet expliciet vermeld is, en er ook geen verwijzing naar symmetrie is gemaakt, voor deze vraag maximaal 2 scorepunten toekennen.*

**16 maximumscore 4**

- $CD=2\cdot\sqrt{\frac{1}{1-p}-1}$ — 2
- $AB\cdot CD=2\cdot\sqrt{\frac{1}{p}-1}\cdot 2\cdot\sqrt{\frac{1}{1-p}-1}=2\cdot\sqrt{\frac{1-p}{p}}\cdot 2\cdot\sqrt{\frac{1-(1-p)}{1-p}}$ — 1
- Dus $AB\cdot CD=4\cdot\sqrt{\frac{1-p}{p}}\cdot\sqrt{\frac{p}{1-p}}=4\cdot 1=4$ — 1

of

- $CD=2\cdot\sqrt{\frac{1}{1-p}-1}$ — 2
- $AB\cdot CD=2\cdot\sqrt{\frac{1}{p}-1}\cdot 2\cdot\sqrt{\frac{1}{1-p}-1}=4\cdot\sqrt{\frac{1}{p}\cdot\frac{1}{1-p}-\frac{1}{1-p}-\frac{1}{p}+1}$ — 1
- Dus $AB\cdot CD=4\cdot\sqrt{\frac{1}{p(1-p)}-\frac{p}{p(1-p)}-\frac{1-p}{p(1-p)}+1}=4\cdot\sqrt{\frac{1-p-(1-p)}{p(1-p)}+1}=4\cdot 1=4$ — 1

**17 maximumscore 3**

- Vermenigvuldigen met $a$ ten opzichte van de $x$-as geeft $y=\dfrac{a}{x^2+1}$ — 1
- Vervolgens vermenigvuldigen met $a$ ten opzichte van de $y$-as geeft $y=\dfrac{a}{\left(\frac{x}{a}\right)^2+1}$ — 1
- $f_a(x)=\dfrac{a}{\left(\frac{x}{a}\right)^2+1}=\dfrac{a^3}{x^2+a^2}$ (of $f_a(x)=\dfrac{a}{a^{-2}x^2+1}$) — 1