Vraag	Antwoord	Scores

Wortelfuncties

1 maximumscore 6

- (De grafieken van f en g snijden elkaar in (0, 0) dus) er moet gelden: $\int_0^a \left(\sqrt{x} - \frac{1}{2}\sqrt{x}\right) \mathrm{d}x = \int_a^4 \frac{1}{2}\sqrt{x}\, \mathrm{d}x$ (ofwel $\int_0^a \frac{1}{2}\sqrt{x}\, \mathrm{d}x = \int_a^4 \frac{1}{2}\sqrt{x}\, \mathrm{d}x$) 2
- Een primitieve van $\frac{1}{2}\sqrt{x}$ is $\frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}}$ 1
- Invullen van de grenzen geeft $\frac{1}{3}a^{\frac{3}{2}} = \frac{8}{3} - \frac{1}{3}a^{\frac{3}{2}}$ 1
- Dit geeft $a^{\frac{3}{2}} = 4$ 1
- Dus $a = \sqrt[3]{16}$ (of een gelijkwaardige uitdrukking) 1

of

- Wegens $f(x) = 2 \cdot g(x)$ zijn de begrensde vlakdelen links van $x = a$ even groot en rechts van $x = a$ ook, dus moeten de vier begrensde vlakdelen even groot zijn 1
- Er moet gelden: $\int_0^a \sqrt{x}\, \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \cdot \int_0^4 \sqrt{x}\, \mathrm{d}x$ (of $\int_0^a \sqrt{x}\, \mathrm{d}x = \int_a^4 \sqrt{x}\, \mathrm{d}x$) 1
- Een primitieve van $\sqrt{x}$ is $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$ 1
- Invullen van de grenzen geeft $\frac{2}{3}a^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{16}{3}$ (of $\frac{2}{3}a^{\frac{3}{2}} = \frac{16}{3} - \frac{2}{3}a^{\frac{3}{2}}$) 1
- Dit geeft $a^{\frac{3}{2}} = 4$ 1
- Dus $a = \sqrt[3]{16}$ (of een gelijkwaardige uitdrukking) 1

of

- De oppervlakte van het ene vlakdeel is $\int_0^a \left(\sqrt{x} - \frac{1}{2}\sqrt{x}\right) \mathrm{d}x = \int_0^a \frac{1}{2}\sqrt{x}\, \mathrm{d}x$ 1
- $\int_0^a \frac{1}{2}\sqrt{x}\, \mathrm{d}x = \left[\frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^a = \frac{1}{3}a^{\frac{3}{2}}$ 1
- De oppervlakte van het andere vlakdeel is $\int_a^4 \frac{1}{2}\sqrt{x}\, \mathrm{d}x$ 1
- $\int_a^4 \frac{1}{2}\sqrt{x}\, \mathrm{d}x = \left[\frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_a^4 = \frac{8}{3} - \frac{1}{3}a^{\frac{3}{2}}$ 1
- $\frac{1}{3}a^{\frac{3}{2}} = \frac{8}{3} - \frac{1}{3}a^{\frac{3}{2}}$ geeft $a^{\frac{3}{2}} = 4$ 1
- Dus $a = \sqrt[3]{16}$ (of een gelijkwaardige uitdrukking) 1

Vraag	Antwoord	Scores

Cirkels en lijnstuk

2 maximumscore 5

- Er geldt: $\cos(2t)=0$ — 1
- Dit geeft $t=\frac{1}{4}\pi$ of $t=\frac{3}{4}\pi$ of $t=\frac{5}{4}\pi$ of $t=\frac{7}{4}\pi$ — 2
- $x_A(\frac{1}{4}\pi)=\sin(\frac{1}{4}\pi)=\cos(\frac{1}{4}\pi)=y_A(\frac{1}{4}\pi)\ \ (=\frac{1}{2}\sqrt{2})$,
  $x_A(\frac{3}{4}\pi)=\sin(\frac{3}{4}\pi)=-\cos(\frac{3}{4}\pi)=-y_A(\frac{3}{4}\pi)\ \ (=\frac{1}{2}\sqrt{2})$,
  $x_A(\frac{5}{4}\pi)=\sin(\frac{5}{4}\pi)=\cos(\frac{5}{4}\pi)=y_A(\frac{5}{4}\pi)\ \ (=-\frac{1}{2}\sqrt{2})$ en
  $x_A(\frac{7}{4}\pi)=\sin(\frac{7}{4}\pi)=-\cos(\frac{7}{4}\pi)=-y_A(\frac{7}{4}\pi)\ \ (=-\frac{1}{2}\sqrt{2})$
  (, dus A bevindt zich op deze tijdstippen op de lijn met vergelijking $y=x$ of op de lijn met vergelijking $y=-x$) — 2

of

- Er geldt: $\cos(2t)=0$ — 1
- Dit geeft $\cos^2 t-\sin^2 t=0$ — 1
- Dus $(\cos t-\sin t)(\cos t+\sin t)=0$ — 1
- Hieruit volgt $\cos t=\sin t$ of $\cos t=-\sin t$ — 1
- Dus A ligt op de lijn met vergelijking $y=x$ of op de lijn met vergelijking $y=-x$ — 1

Opmerking
Als bij de eerste werkwijze hierboven niet voor alle vier waarden van t de juistheid van de bewering is aangetoond, dan per ontbrekende situatie 1 scorepunt in mindering brengen.

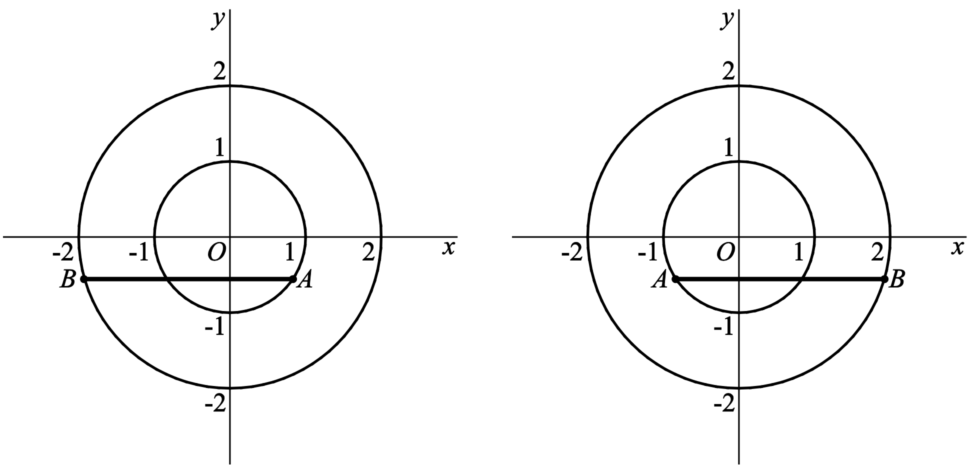
Vraag	Antwoord	Scores

3 maximumscore 6

- Er moet gelden: $2\cos(2t) = \cos t$ 1
- Beschrijven hoe deze vergelijking kan worden opgelost 1
- Een oplossing behorende bij een negatieve y-coördinaat is $t \approx 2{,}21$ (of $t \approx 4{,}08$) 1
- De coördinaten van A zijn dan (ongeveer) (0,8; –0,6) (of (–0,8; –0,6)) 1
- De coördinaten van B zijn dan (ongeveer) (–1,9; –0,6) (of (1,9; –0,6)) (of een correcte beredenering waaruit de juiste ligging van B volgt) 1
- Een mogelijke tekening van lijnstuk AB (zie hieronder de twee mogelijkheden) 1

of

- Er moet gelden: $2\cos(2t) = \cos t$ 1
- Hieruit volgt $2(2\cos^2 t - 1) = \cos t$ 1
- $4\cos^2 t - \cos t - 2 = 0$ geeft $\cos t = \dfrac{1 \pm \sqrt{33}}{8}$ met als negatieve oplossing $\cos t \approx -0{,}6$ 1
- De coördinaten van A zijn dan (ongeveer) (0,8; –0,6) (of (–0,8; –0,6)) 1
- De coördinaten van B zijn dan (ongeveer) (–1,9; –0,6) (of (1,9; –0,6)) (of een correcte beredenering waaruit de juiste ligging van B volgt) 1
- Een mogelijke tekening van lijnstuk AB (zie hieronder de twee mogelijkheden) 1



Vraag	Antwoord	Scores

Helderheid van sterren

4 maximumscore 4

- Invullen van $m=1$ en $L=10^{-6}$ in $L=10^{p+qm}$ geeft $p+q=-6$ — 1
- Invullen van $m=6$ en $L=10^{-8}$ in $L=10^{p+qm}$ geeft $p+6q=-8$ — 1
- Beschrijven hoe deze vergelijkingen kunnen worden opgelost — 1
- $p=-5,6$ en $q=-0,4$ — 1

of

- Uit de tabelgegevens volgt voor de groeifactor g: $g^5=\dfrac{1,0\cdot 10^{-8}}{1,0\cdot 10^{-6}}=10^{-2}$ — 1
- Dit geeft $g=10^{-0,4}$, dus geldt: $L=b\cdot 10^{-0,4m}$ — 1
- Bijvoorbeeld $1,0\cdot 10^{-6}=b\cdot 10^{-0,4\cdot 1}$ geeft $b=10^{-5,6}$ — 1
- $L=10^{-5,6}\cdot 10^{-0,4m}=10^{-5,6-0,4m}$ (, dus $p=-5,6$ en $q=-0,4$) — 1

of

- Beschrijven hoe met de GR met behulp van exponentiële regressie een verband tussen L en m kan worden bepaald — 1
- Het verband is $L=b\cdot g^m$ met $b\approx 2,51\cdot 10^{-6}$ en $g\approx 0,40$ (of nauwkeuriger) — 1
- Dit geeft $\log b=-5,6$ en $\log g=-0,4$ — 1
- Dus $L=10^{-5,6}\cdot (10^{-0,4})^m=10^{-5,6-0,4m}$ (, dus $p=-5,6$ en $q=-0,4$) — 1

5 maximumscore 4

- Bij $m=4,30$ hoort $L\approx 4,79\cdot 10^{-8}$ (of $L=10^{-7,32}$) en bij $m=3,58$ hoort $L\approx 9,29\cdot 10^{-8}$ (of $L=10^{-7,032}$) — 1
- Voor de twee sterren samen geldt: $L\approx 1,41\cdot 10^{-7}$ — 1
- Beschrijven hoe de vergelijking $1,41\cdot 10^{-7}=10^{-5,6-0,4m}$ kan worden opgelost — 1
- Het antwoord: 3,1 — 1

Vraag	Antwoord	Scores

6 **maximumscore 4**

- $10^{-5,6-0,4m} = \dfrac{C}{x^2}$ — 1
- $-5,6-0,4m = \log\left(\dfrac{C}{x^2}\right)$ — 1
- $-5,6-0,4m = \log C - 2\log x$ — 1
- $14,0 + m = -2,5\log C + 5,0\log x$ en dus $m = -14,0 - 2,5\log C + 5,0\log x$ (of $m(x) = -14,0 - 2,5\log C + 5,0\log x$) — 1

of

- $10^{-5,6-0,4m} = \dfrac{C}{x^2}$ — 1
- $-5,6-0,4m = \log\left(\dfrac{C}{x^2}\right)$ — 1
- $m = -14,0 - 2,5\log\left(\dfrac{C}{x^2}\right)$ — 1
- $m = -14,0 - 2,5\left(\log C - 2\log x\right) = -14,0 - 2,5\log C + 5,0\log x$ (of $m(x) = -14,0 - 2,5\log C + 5,0\log x$) — 1

7 **maximumscore 3**

- $\dfrac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}x} = \dfrac{5,0}{x \cdot \ln 10}$ — 1
- Voor de gegeven waarde van x geldt: $\dfrac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}x} = \dfrac{5,0}{6,3 \cdot 10^{17} \cdot \ln 10}$ — 1
- $\dfrac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = \dfrac{5,0}{6,3 \cdot 10^{17} \cdot \ln 10} \cdot 1,7 \cdot 10^{12} \approx 5,9 \cdot 10^{-6}$ (of nauwkeuriger) (per jaar) — 1

Opmerking

Als $\dfrac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}x}$ *foutief berekend wordt waarbij een constante term met C blijft staan en deze daarna op correcte wijze tot in het eindantwoord wordt meegenomen, dan maximaal 2 scorepunten voor deze vraag toekennen.*

Vraag	Antwoord	Scores

Gelijke hoeken

8 maximumscore 4

- $MA = MB$ (; *cirkel*) 1
- Boog MA = boog MB (dus $\angle ANM = \angle BNM$); *boog en koorde* 2
- $\angle ASM = \frac{1}{2}\angle ANM = \frac{1}{2}\angle BNM = \angle BSM$; *omtrekshoek* 1

of

- $MA = MB$ (; *cirkel*) en $NA = NB$ (; *cirkel*) (en $MN = MN$) 1
- $\Delta ANM \cong \Delta BNM$; *ZZZ* 1
- Hieruit volgt $\angle ANM = \angle BNM$ 1
- $\angle ASM = \frac{1}{2}\angle ANM = \frac{1}{2}\angle BNM = \angle BSM$; *omtrekshoek* 1

of

- $\angle ASM = \angle ABM$; *constante hoek* 1
- $\angle ABM = \angle BAM$; *gelijkbenige driehoek* 1
- $\angle BAM = \angle BSM$; *constante hoek* 1
- Dus $\angle ASM = \angle BSM$ 1

9 maximumscore 5

- $\angle AMS = 90°$; *Thales* 1
- $\angle ASM = \frac{1}{2}\angle ASB$ (vorige vraag) 1
- $\angle MAS = 90° - \frac{1}{2}\angle ASB$; *hoekensom driehoek* 1
- $MC = MA$ (; *cirkel*), dus $\angle MCA = \angle MAC = 90° - \frac{1}{2}\angle ASB$; *gelijkbenige driehoek* 1
- $\angle AMC = 180° - 2\cdot(90° - \frac{1}{2}\angle ASB) = \angle ASB$; *hoekensom driehoek* 1

of

- $\angle MCA + \angle MAC = 180° - \angle AMC$; *hoekensom driehoek* en $MC = MA$ (; *cirkel*), dus $\angle MCA = \frac{1}{2}(180° - \angle AMC) = 90° - \frac{1}{2}\angle AMC$; *gelijkbenige driehoek* 1
- $\angle MCS = 180° - (90° - \frac{1}{2}\angle AMC) = 90° + \frac{1}{2}\angle AMC$; *gestrekte hoek* 1
- $\angle AMS = 90°$, dus $\angle SMC = 90° - \angle AMC$; *Thales* 1
- $\angle CSM = 180° - (90° + \frac{1}{2}\angle AMC) - (90° - \angle AMC) = \frac{1}{2}\angle AMC$; *hoekensom driehoek* 1
- $\angle ASB = 2\cdot\frac{1}{2}\angle AMC = \angle AMC$ (vorige vraag) 1

Vraag	Antwoord	Scores

Gelijke hellingen

10 maximumscore 3

- $f_a'(x) = \cos x \cdot \sin(x-a) + \sin x \cdot \cos(x-a)$ 2
- Dan volgt $f_a'(x) = \sin(x + x - a) = \sin(2x - a)$ 1

of

- $f_a(x) = -\frac{1}{2}(\cos(2x-a) - \cos a)$ 1
- $f_a'(x) = -\frac{1}{2}(-2\sin(2x-a)) = \sin(2x-a)$ 2

11 maximumscore 6

- Als de hellingen gelijk zijn, dan geldt: $\sin(2x - \frac{1}{6}\pi) = \cos x$ 1
- Dit geeft $\sin(2x - \frac{1}{6}\pi) = \sin(\frac{1}{2}\pi - x)$ 1
- Dit geeft $2x - \frac{1}{6}\pi = \frac{1}{2}\pi - x + k \cdot 2\pi$ of $2x - \frac{1}{6}\pi = \pi - (\frac{1}{2}\pi - x) + k \cdot 2\pi$ 1
- Op $[0, \pi]$ zijn de oplossingen $x = \frac{2}{9}\pi$ of $x = \frac{2}{3}\pi$ of $x = \frac{8}{9}\pi$ 2
- (Het raakpunt ligt bij $x = \frac{2}{3}\pi$ en dus geldt voor het gevraagde verschil:)
  $\frac{8}{9}\pi - \frac{2}{9}\pi = \frac{2}{3}\pi$ 1

Hardheid

12 maximumscore 5

- $f'(x) = \frac{1}{2}(25 - x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot -2x \ \left(= -\frac{x}{\sqrt{25 - x^2}}\right)$ 2
- $(f'(x))^2 = \frac{x^2}{25 - x^2}$ 1
- $1 + (f'(x))^2 = 1 + \frac{x^2}{25 - x^2} = \frac{25}{25 - x^2}$ 1
- $\sqrt{1 + (f'(x))^2} = \sqrt{\frac{25}{25 - x^2}} = \frac{5}{\sqrt{25 - x^2}}$ 1

13 maximumscore 3

- $f(x) \cdot \sqrt{1 + (f'(x))^2} = \sqrt{25 - x^2} \cdot \frac{5}{\sqrt{25 - x^2}} = 5$ 1
- Een primitieve van 5 is $5x$ 1
- $[5x]_{5-h}^{5} = 25 - (25 - 5h) = 5h$, dus $A = 2\pi \cdot 5h = 10\pi h$ 1

Vraag	Antwoord	Scores

14 maximumscore 5

- $(5-h)^2+(\frac{1}{2}d)^2=5^2$ (of $\frac{1}{2}d=f(5-h)=\sqrt{25-(5-h)^2}$) 2
- $h^2-10h+\frac{1}{4}d^2=0$ 1
- $h=\dfrac{10\pm\sqrt{(-10)^2-4\cdot1\cdot\frac{1}{4}d^2}}{2\cdot1}=\dfrac{10\pm\sqrt{100-d^2}}{2}$ 1
- $h=\dfrac{10+\sqrt{100-d^2}}{2}$ voldoet niet (omdat de kogel niet verder dan 5 mm in het materiaal mag worden gedrukt) 1

of

- De afstand van het middelpunt van de bol tot de oorspronkelijke bovenkant van het materiaal is $\sqrt{5^2-(\frac{1}{2}d)^2}$ 2
- $\sqrt{25-(\frac{1}{2}d)^2}+h=5$ 1
- Dit geeft $h=5-\dfrac{\sqrt{100-d^2}}{\sqrt{4}}$ 1
- Dus $h=\dfrac{10-\sqrt{100-d^2}}{2}$ 1

of

- $(10-2h)^2+d^2=10^2$ 2
- $4h^2-40h+d^2=0$ 1
- $h=\dfrac{40\pm\sqrt{(-40)^2-4\cdot4\cdot d^2}}{2\cdot4}=\dfrac{10\pm\sqrt{100-d^2}}{2}$ 1
- $h=\dfrac{10+\sqrt{100-d^2}}{2}$ voldoet niet (omdat de kogel niet verder dan 5 mm in het materiaal mag worden gedrukt) 1

15 maximumscore 5

- Uit $340=\dfrac{0{,}102\cdot29\,400}{A}$ volgt $A=8{,}82$ (mm^2) 1
- Uit $8{,}82=10\pi h$ volgt $h\approx0{,}28$ (mm) (of $h=\dfrac{8{,}82}{10\pi}$) 1
- Er geldt: $0{,}28=\dfrac{10-\sqrt{100-d^2}}{2}$ (of $4{,}72^2+(\frac{1}{2}d)^2=5^2$) 1
- Beschrijven hoe deze vergelijking kan worden opgelost 1
- Het antwoord: (ongeveer) 3,3 (mm) 1

Vraag	Antwoord	Scores

Raken aan een cirkel

16 maximumscore 5

- $\angle MEA = \frac{1}{2}\angle DEA$ en $\angle MAE = \frac{1}{2}\angle BAE$ (; *bissectrice*) 1
- $\angle BAE = \angle AEP$ met P op m, links van E; *Z-hoeken* 1
- $\angle DEA + \angle BAE = \angle DEA + \angle AEP = 180°$; *gestrekte hoek* 1
- Dus $\angle MEA + \angle MAE = \frac{1}{2}(\angle DEA + \angle BAE) = \frac{1}{2} \cdot 180° = 90°$ 1
- $\angle AME = 180° - 90° = 90°$; *hoekensom driehoek* 1

of

- $MB \perp k$, dus $MB \perp m$; *raaklijn, F-hoeken* 1
- $MB \perp m$ en $MD \perp m$; *raaklijn*, dus B, M en D liggen op één lijn, dus $\angle BMD = 180°$ 1
- $\Delta ABM \cong \Delta ACM$ (gegeven), dus $\angle AMB = \angle AMC$ en $\Delta ECM \cong \Delta EDM$ (gegeven), dus $\angle EMC = \angle EMD$ 2
- $\angle AME = \angle AMC + \angle EMC = \frac{1}{2}\angle BMD = 90°$ 1

17 maximumscore 4

- Als N het middelpunt van de cirkel is dan geldt: $NF = \mathrm{d}(N, k)$, dus N ligt op de getekende parabool (; *afstand punt tot lijn, parabool*) 1
- Ook geldt: $\mathrm{d}(N, k) = \mathrm{d}(N, l)$, dus N ligt op de bissectrice van k en l (; *afstand punt tot lijn, bissectrice*) 1
- Dus N is het (linker)snijpunt van de bissectrice van k en l en de parabool 1
- Het tekenen van N 1