Formules

Vlakke meetkunde

Verwijzingen naar definities en stellingen die bij een bewijs mogen worden gebruikt zonder nadere toelichting.

Hoeken, lijnen en afstanden:
gestrekte hoek, rechte hoek, overstaande hoeken, F-hoeken, Z-hoeken, afstand punt tot lijn, driehoeksongelijkheid.

Meetkundige plaatsen:
middelloodlijn, bissectrice, bissectricepaar, middenparallel, cirkel, parabool.

Driehoeken:
hoekensom driehoek, buitenhoek driehoek, congruentie: HZH, ZHH, ZHZ, ZZZ, ZZR; gelijkvormigheid: hh, zhz, zzz, zzr; middelloodlijnen driehoek, bissectrices driehoek, hoogtelijn driehoek, hoogtelijnen driehoek, zwaartelijn driehoek, zwaartelijnen driehoek, gelijkbenige driehoek, gelijkzijdige driehoek, rechthoekige driehoek, Pythagoras, gelijkbenige rechthoekige driehoek, halve gelijkzijdige driehoek.

Vierhoeken:
hoekensom vierhoek, parallellogram, ruit, rechthoek, vierkant.

Cirkel, koorden, bogen, hoeken, raaklijn, vierhoeken:
koorde, boog en koorde, loodlijn op koorde, middellijn, Thales, middelpuntshoek, omtrekshoek, constante hoek, raaklijn, hoek tussen koorde en raaklijn, koordenvierhoek.

Goniometrie

$$\sin(t+u) = \sin t \cos u + \cos t \sin u \qquad \sin t + \sin u = 2\sin\tfrac{t+u}{2}\cos\tfrac{t-u}{2}$$

$$\sin(t-u) = \sin t \cos u - \cos t \sin u \qquad \sin t - \sin u = 2\sin\tfrac{t-u}{2}\cos\tfrac{t+u}{2}$$

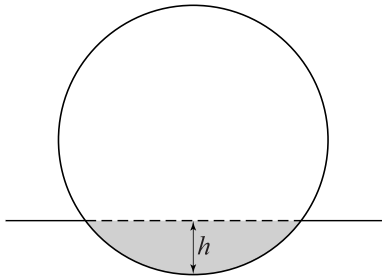
$$\cos(t+u) = \cos t \cos u - \sin t \sin u \qquad \cos t + \cos u = 2\cos\tfrac{t+u}{2}\cos\tfrac{t-u}{2}$$

$$\cos(t-u) = \cos t \cos u + \sin t \sin u \qquad \cos t - \cos u = -2\sin\tfrac{t+u}{2}\sin\tfrac{t-u}{2}$$

Bal in de sloot

Een bal met een straal van 11 cm komt in een sloot terecht en blijft drijven. Het laagste punt van de bal bevindt zich h cm onder het wateroppervlak.
In figuur 1 zie je een doorsnede van de situatie. Het deel van de bal onder het wateroppervlak is daarin grijs gemaakt.

figuur 1

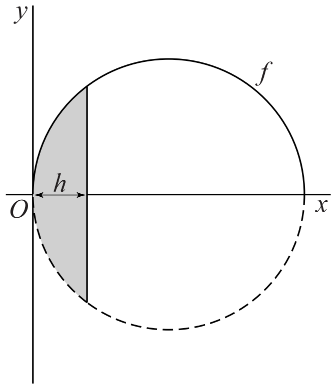


Om het rekenwerk te vereenvoudigen, draaien we de figuur een kwartslag. Vervolgens kiezen we een assenstelsel zodanig dat de halve cirkel boven de x-as de grafiek is van de functie f met:

$$f(x) = \sqrt{22x - x^2}$$

Hierbij zijn x en $f(x)$ in centimeters. Zie figuur 2.

figuur 2



Het deel van de bal onder het wateroppervlak is op te vatten als een omwentelingslichaam dat ontstaat bij wenteling van een deel van de grafiek van f om de x-as.

Voor de inhoud I in cm^3 van het deel van de bal onder het wateroppervlak geldt:

$$I = \pi h^2 (11 - \tfrac{1}{3}h)$$

4p **1** Bewijs dat deze formule juist is.

De massa van de bal is 425 gram. Uit de natuurkunde is bekend dat de massa van een drijvende bal even groot is als de massa van het door de bal weggedrukte water. Neem aan dat 1 cm^3 water een massa van 1 gram heeft.

3p **2** Bereken hoe diep de drijvende bal in het water ligt. Rond je antwoord af op een geheel aantal millimeters.

Boven en onder de lijn door de buigpunten

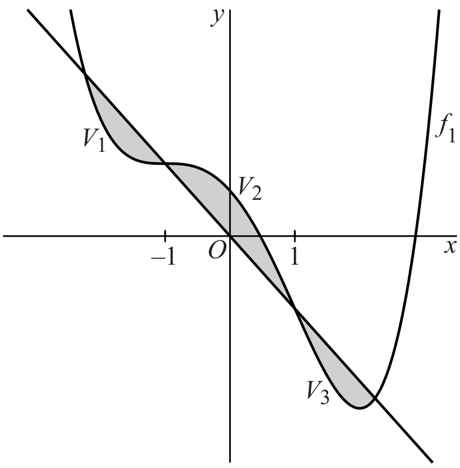
Voor elke waarde van p met $p \neq 0$ is een functie f_p gegeven waarbij voor de tweede afgeleide geldt: $f_p''(x) = 12(x-p)(x+p)$

Er geldt: $f_p(x) = x^4 - 6p^2x^2 + ax + b$ met a en b constanten.

4p **3** Toon dit aan met primitiveren.

Voor $a = -8$ en $b = 5$ wordt f_1 gegeven door $f_1(x) = x^4 - 6x^2 - 8x + 5$.
In de figuur zie je de grafiek van f_1. Deze grafiek heeft buigpunten voor $x = -1$ en $x = 1$. De lijn door deze buigpunten heeft vergelijking $y = -8x$.
Deze lijn en de grafiek van f_1 begrenzen drie vlakdelen V_1, V_2 en V_3 die om en om onder en boven de lijn liggen.

figuur



De lijn met vergelijking $y = -8x$ snijdt de grafiek van f_1 niet alleen in de twee buigpunten, maar ook in twee andere punten.

4p **4** Bereken exact de x-coördinaten van de twee andere snijpunten.

De vlakdelen V_1 en V_3 hebben gelijke oppervlakte, namelijk $3\frac{1}{5}$.

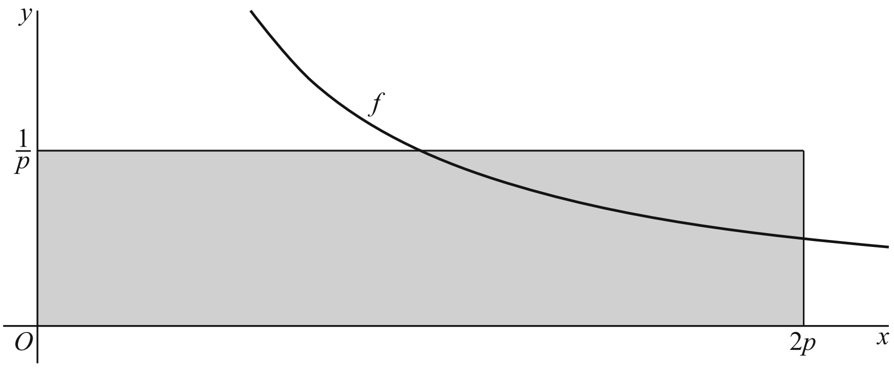
4p **5** Bewijs dat de gezamenlijke oppervlakte van V_1 en V_3 gelijk is aan de oppervlakte van V_2.

Grafiek verdeelt rechthoek

Voor $x > 0$ is de functie f gegeven door $f(x) = \frac{1}{x}$.

In onderstaande figuur is voor $p > 0$ een rechthoek getekend die wordt begrensd door de lijnen met vergelijkingen $x = 2p$ en $y = \frac{1}{p}$, de x-as en de y-as.

figuur



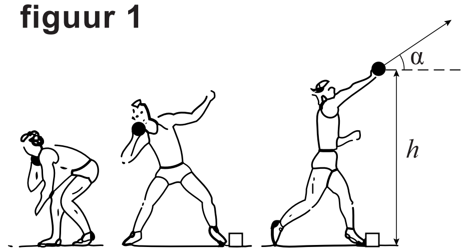
Voor elke positieve waarde van p verdeelt de grafiek van f de rechthoek in twee stukken.

7p **6** Bewijs met behulp van integreren dat de oppervlakte van elk van deze stukken onafhankelijk is van de waarde van p.

De ideale stoothoek

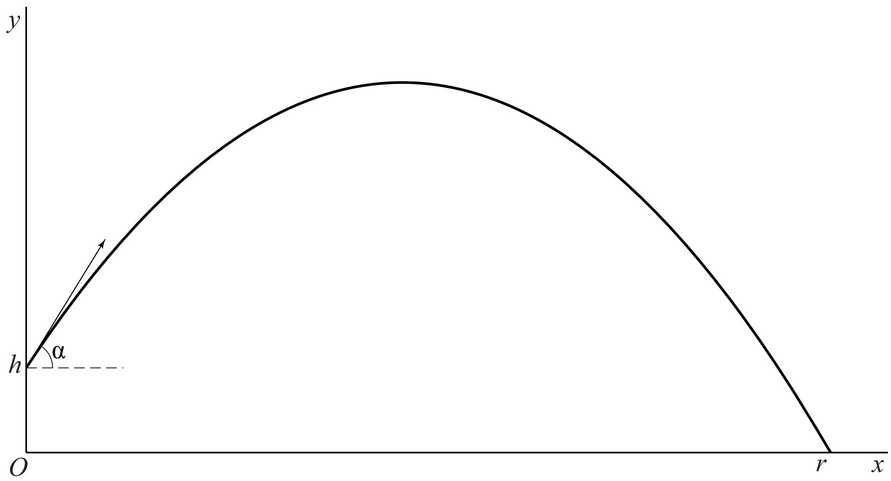
Een kogelstoter stoot een kogel weg onder een hoek α (in radialen, $0 < \alpha < \frac{1}{2}\pi$).
De hoogte in meters waarop de kogelstoter de kogel loslaat is h.
Zie figuur 1.

figuur 1



Bij deze situatie kiezen we een assenstelsel waarbij de plaats waar de kogel wordt losgelaten zich op hoogte h op de verticale as bevindt. De kogel komt op afstand r in meters van de oorsprong op de grond. Zie figuur 2.
In deze opgave gaan we ervan uit dat de kogelstoter de kogel altijd met dezelfde snelheid wegstoot.

figuur 2



Als α zo is dat $\cos\alpha = 0{,}6$ en we de afmetingen van de kogel en de wrijving met de lucht verwaarlozen, dan gelden (bij benadering) de volgende formules voor de coördinaten van de kogel tijdens de vlucht:

$$\begin{cases} x(t) = 8{,}4t \\ y(t) = h + 11{,}2t - 4{,}9t^2 \end{cases}$$

Hierin is t de tijd in seconden met $t = 0$ op het moment van loslaten, x de horizontale afstand in meters en y de hoogte in meters.

De kogelstoter laat de kogel los op een hoogte van 1,96 m.

4p **7** Bereken op hoeveel meter afstand van de kogelstoter de kogel op de grond komt. Rond je antwoord af op een geheel aantal decimeters.

De horizontale afstand r die de kogel overbrugt, hangt af van de hoek α waaronder deze wordt weggestoten.
In het algemeen geldt voor elke waarde van α de volgende formule voor r:

$$r = 20\cos\alpha\left(\sin\alpha + \sqrt{\sin^2\alpha + 0{,}1h}\right)$$

De ideale stoothoek is de hoek α waarbij r zo groot mogelijk is.

We bekijken nu de situatie waarbij de kogelstoter de kogel loslaat op een hoogte van 1,85 m.

3p **8** Bereken voor deze situatie de ideale stoothoek.

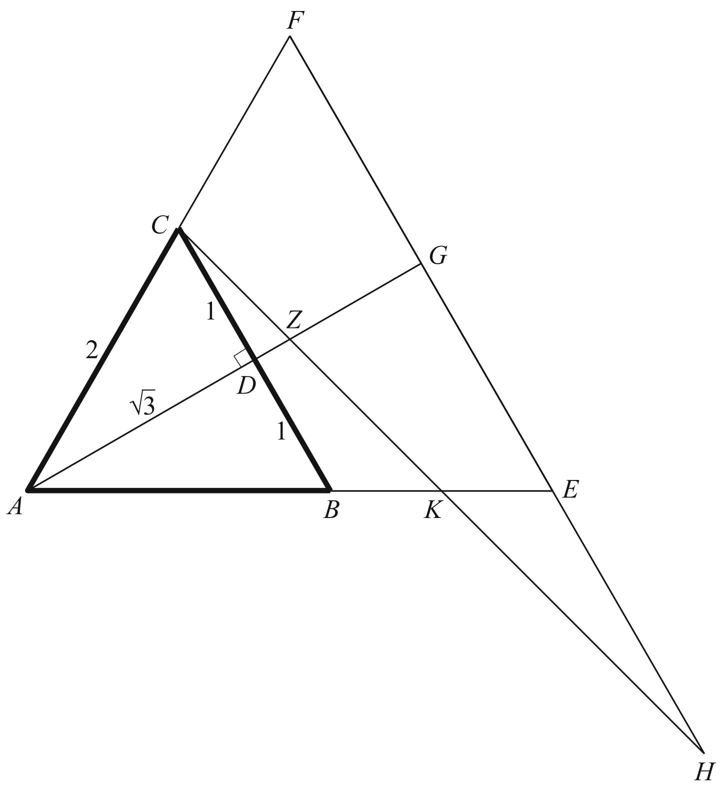
Tot slot bekijken we de denkbeeldige situatie waarin $h = 0$.

6p **9** Bereken exact de ideale stoothoek voor deze denkbeeldige situatie.

Even lang

Gegeven is een gelijkzijdige driehoek ABC met zijden van lengte 2.
In driehoek ABC is AD hoogtelijn én zwaartelijn.
Daarom geldt: $BD = CD = 1$ en $AD = \sqrt{3}$
Ook is gegeven de gelijkzijdige driehoek AEF met zijden van lengte $2\sqrt{3}$, waarbij E en F op het verlengde van respectievelijk AB en AC liggen.
Lijn AD snijdt EF in G. Z is het zwaartepunt van driehoek AEF.
De lijn door C en Z snijdt AE in K en het verlengde van FE in H.
Zie onderstaande figuur. Deze figuur staat ook op de uitwerkbijlage.

figuur



De driehoeken CDZ en HGZ zijn gelijkvormig.

4p **10** Bewijs dit. Je kunt hierbij gebruikmaken van de figuur op de uitwerkbijlage.

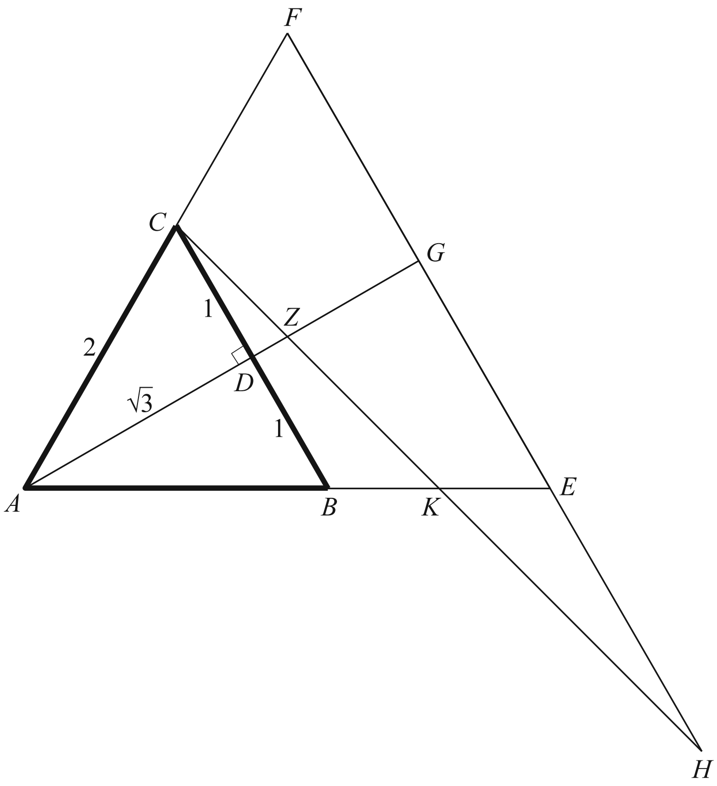
De lengte van DZ is $2-\sqrt{3}$.

3p **11** Toon dit met een exacte berekening aan.

5p **12** Bewijs dat EH even lang is als AB. Je kunt hierbij gebruikmaken van de figuur op de uitwerkbijlage.

uitwerkbijlage

10 en 12



Gemeenschappelijk met de x-as

Voor elke waarde van a met $a \neq 0$ is de functie f_a gegeven door $f_a(x) = 2\sin(ax) + \sin(2ax)$. Het punt $(\frac{\pi}{a}, 0)$ is een gemeenschappelijk punt van de grafiek van f_a en de x-as.

4p **13** Bewijs dat voor elke waarde van a (met $a \neq 0$) de grafiek van f_a de x-as in $(\frac{\pi}{a}, 0)$ raakt.

5p **14** Bewijs dat de grafiek van f_2 puntsymmetrisch is in het punt $(\frac{1}{2}\pi, 0)$.

Hoogwaterstanden

Onder invloed van de maan ontstaan eb en vloed. Een periode van eb en vloed duurt 12 uur en 25 minuten en de hoogste waterstand gedurende zo'n periode heet een **hoogwaterstand**. Elke periode van eb en vloed levert dus één hoogwaterstand op.

Om in te schatten hoe groot de risico's bij hoogwaterstanden zijn, stelt men op grond van een groot aantal metingen een formule op. Deze formule is van de vorm

$f(h) = 10^{a-b\cdot h}$, met a en b constanten.

Hierin is h de hoogte in meters boven NAP en $f(h)$ het gemiddeld aantal keren per jaar dat een hoogwaterstand de waarde van h overschrijdt.

In Hoek van Holland geldt voor hoogwaterstanden tussen 0,9 m en 2,5 m boven NAP: $a = 4{,}3$ en $b = 1{,}9$.

3p **15** Bereken welke waarde van h volgens de formule gemiddeld één keer per jaar wordt overschreden. Rond je antwoord af op één decimaal.

Als de zeespiegel, en daarmee ook de hoogwaterstanden, 0,1 m zou stijgen, zou dit leiden tot een groter gemiddeld aantal keren per jaar dat de waarde $h = 2{,}5$ in Hoek van Holland wordt overschreden.

3p **16** Bereken hoeveel keer zo groot dit gemiddeld aantal keren zou zijn.

Metingen tonen aan dat de waarden $a = 4{,}3$ en $b = 1{,}9$ voor $h > 2{,}5$ tot te kleine waarden van $f(h)$ leiden. Men vermoedt dat een hoogwaterstand van 3,9 meter boven NAP, zoals bij de watersnoodramp in Zuidwest-Nederland in 1953, gemiddeld ongeveer eens per 100 jaar voorkomt. Volgens de formule zou dat maar eens per 1288 jaar zijn.

We zoeken daarom nieuwe waarden voor a en b, die aan de volgende voorwaarden voldoen:

– $h = 2{,}5$ levert dezelfde waarde van $f(h)$ op als met de oude waarden voor a en b het geval was;
– $h = 3{,}9$ levert voor $f(h)$ de waarde 0,01 op.

5p **17** Bereken de nieuwe waarden van a en b. Rond deze waarden af op één decimaal.

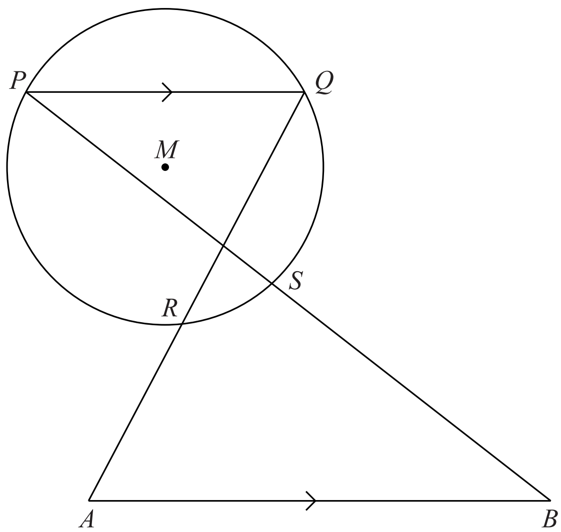
Koordenvierhoek

Gegeven zijn een cirkel met middelpunt M en een lijnstuk AB buiten de cirkel. De lijn door A en B snijdt de cirkel niet.

Punten P en Q worden zodanig op de cirkel gekozen dat aan de volgende voorwaarden is voldaan:
- koorde PQ is evenwijdig aan lijnstuk AB;
- lijnstuk AQ snijdt de cirkel in R;
- lijnstuk BP snijdt de cirkel in S;
- AQ snijdt BP binnen de cirkel.

Zie de figuur hieronder.

figuur



5p **18** Bewijs dat $ABSR$ een koordenvierhoek is. Je kunt hierbij gebruikmaken van de figuur op de uitwerkbijlage.

uitwerkbijlage

18