Vraag	Antwoord	Scores

Bal in de sloot

1 **maximumscore 4**

- De gevraagde inhoud I is $\pi\int_0^h \left(f(x)\right)^2 \, \mathrm{d}x$ 1
- $\pi\int_0^h \left(f(x)\right)^2 \, \mathrm{d}x = \pi\int_0^h (22x - x^2)\, \mathrm{d}x$ 1
- Een primitieve van $22x - x^2$ is $11x^2 - \frac{1}{3}x^3$ 1
- $I = \pi(11h^2 - \frac{1}{3}h^3) = \pi h^2(11 - \frac{1}{3}h)$ 1

2 **maximumscore 3**

- Er moet gelden $\pi h^2(11 - \frac{1}{3}h) = 425$ 1
- Beschrijven hoe deze vergelijking kan worden opgelost 1
- Het antwoord: 37 (mm) (of 3,7 cm) 1

Vraag	Antwoord	Scores

Boven en onder de lijn door de buigpunten

3 maximumscore 4

- $f_p''(x) = 12x^2 - 12p^2$ — 1
- Primitiveren geeft $f_p'(x) = 4x^3 - 12p^2x + a$ (met a een constante) — 2
- Nogmaals primitiveren geeft $f_p(x) = x^4 - 6p^2x^2 + ax + b$ (met b een constante) (, dus is het gestelde juist) — 1

Opmerking
Als met differentiëren is aangetoond dat $f_p''(x) = 12(x - p)(x + p)$ volgt uit $f_p(x) = x^4 - 6p^2x^2 + ax + b$ voor deze vraag geen scorepunten toekennen.

4 maximumscore 4

- $x^4 - 6x^2 - 8x + 5 = -8x$ geeft $x^4 - 6x^2 + 5 = 0$ — 1
- Dus $(x^2 - 1)(x^2 - 5) = 0$ — 1
- Hieruit volgt $x^2 = 1$ of $x^2 = 5$ — 1
- ($x^2 = 1$ geeft de x-coördinaten van de buigpunten, dus) de x-coördinaten van de twee gevraagde snijpunten zijn $x = -\sqrt{5}$ en $x = \sqrt{5}$ — 1

Vraag	Antwoord	Scores

5 maximumscore 4

- De oppervlakte van V_2 is gelijk aan $\int_{-1}^{1}\left((x^4-6x^2-8x+5)-(-8x)\right)\mathrm{d}x$,
  dus aan $\int_{-1}^{1}(x^4-6x^2+5)\,\mathrm{d}x$ 1
- Een primitieve van x^4-6x^2+5 is $\frac{1}{5}x^5-2x^3+5x$ 1
- $\left[\frac{1}{5}x^5-2x^3+5x\right]_{-1}^{1}=6\frac{2}{5}$ 1
- $6\frac{2}{5}=3\frac{1}{5}+3\frac{1}{5}$ (dus de gezamenlijke oppervlakte van V_1 en V_3 is gelijk aan de oppervlakte van V_2) 1

of

- Omdat zowel V_1 als V_3 onder de lijn met vergelijking $y=-8x$ ligt en V_2 erboven, is de bewering juist indien geldt:
  $\int_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}}\left((x^4-6x^2-8x+5)-(-8x)\right)\mathrm{d}x=0$, dus $\int_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}}(x^4-6x^2+5)\,\mathrm{d}x=0$ 2
- Een primitieve van x^4-6x^2+5 is $\frac{1}{5}x^5-2x^3+5x$ 1
- $\left[\frac{1}{5}x^5-2x^3+5x\right]_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}}=0$ (dus de gezamenlijke oppervlakte van V_1 en V_3 is gelijk aan de oppervlakte van V_2) 1

Vraag	Antwoord	Scores

Grafiek verdeelt rechthoek

6 maximumscore 7

- De grafiek van f en de lijn met vergelijking $y=\frac{1}{p}$ snijden elkaar voor $x=p$ 1
- De oppervlakte van het stuk onder de grafiek is $1+\int_{p}^{2p}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$ 1
- Een primitieve van $\frac{1}{x}$ is $\ln x$ 1
- De oppervlakte van het stuk onder de grafiek is $1+\ln(2p)-\ln p$ 1
- $1+\ln(2p)-\ln p=1+\ln 2+\ln p-\ln p=1+\ln 2$ (of: $1+\ln(2p)-\ln p\ (=1+\ln\left(\frac{2p}{p}\right))=1+\ln 2$) 1
- De oppervlakte van de rechthoek is $2p\cdot\frac{1}{p}=2$ 1
- De oppervlakte van het stuk boven de grafiek is $1-\ln 2$ (, dus de oppervlakte van elk van beide stukken is onafhankelijk van de waarde van p) 1

of

- De grafiek van f en de lijn met vergelijking $y=\frac{1}{p}$ snijden elkaar voor $x=p$ 1
- De oppervlakte van het stuk boven de grafiek is $\int_{p}^{2p}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x$ 1
- Een primitieve van $\frac{1}{p}-\frac{1}{x}$ is $\frac{1}{p}x-\ln x$ 1
- De oppervlakte van het stuk boven de grafiek is $1-\ln(2p)+\ln p$ 1
- $1-\ln(2p)+\ln p=1-\ln 2-\ln p+\ln p=1-\ln 2$ (of: $1-\ln(2p)+\ln p\ (=1-\ln\left(\frac{2p}{p}\right))=1-\ln 2$) 1
- De oppervlakte van de rechthoek is $2p\cdot\frac{1}{p}=2$ 1
- De oppervlakte van het stuk onder de grafiek is $1+\ln 2$ (, dus de oppervlakte van elk van beide stukken is onafhankelijk van de waarde van p) 1

Vraag	Antwoord	Scores

De ideale stoothoek

7 maximumscore 4

- De kogel komt op de grond als $1{,}96+11{,}2t-4{,}9t^2=0$ — 1
- Beschrijven hoe deze vergelijking kan worden opgelost — 1
- De (positieve) oplossing is $t\approx 2{,}45$ — 1
- $x=8{,}4\cdot 2{,}45\approx 20{,}6$ dus de horizontale afstand is 206 (dm) (of 20,6 m) — 1

8 maximumscore 3

- Er moet gelden: $r=20\cos\alpha\left(\sin\alpha+\sqrt{\sin^2\alpha+0{,}1\cdot 1{,}85}\right)$ is maximaal — 1
- Beschrijven hoe hieruit α gevonden kan worden — 1
- Het antwoord: 0,74 (rad) (of 43º) (of nauwkeuriger) — 1

Vraag	Antwoord	Scores

9 **maximumscore 6**

- Als $h = 0$ dan $r = 20\cos\alpha\left(\sin\alpha + \sqrt{\sin^2\alpha}\right)$ — 1
- ($\sin\alpha > 0$, dus) $20\cos\alpha\left(\sin\alpha + \sqrt{\sin^2\alpha}\right) = 40\cos\alpha\sin\alpha$ — 1
- $\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\alpha} = 40\cos^2\alpha - 40\sin^2\alpha$ — 2
- $\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\alpha} = 0$ geeft $\cos^2\alpha = \sin^2\alpha$ — 1
- ($0 < \alpha < \frac{1}{2}\pi$, dus) het antwoord is $\frac{1}{4}\pi$ (rad) (of 45º) — 1

of

- Als $h = 0$ dan $r = 20\cos\alpha\left(\sin\alpha + \sqrt{\sin^2\alpha}\right)$ — 1
- ($\sin\alpha > 0$, dus) $20\cos\alpha\left(\sin\alpha + \sqrt{\sin^2\alpha}\right) = 40\cos\alpha\sin\alpha$ — 1
- $40\cos\alpha\sin\alpha = 20\sin(2\alpha)$ — 1
- $\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\alpha} = 20\cdot 2\cdot\cos(2\alpha)$ — 1
- $\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\alpha} = 0$ geeft $\cos(2\alpha) = 0$ — 1
- ($0 < \alpha < \frac{1}{2}\pi$, dus) het antwoord is $\frac{1}{4}\pi$ (rad) (of 45º) — 1

of

- Als $h = 0$ dan $r = 20\cos\alpha\left(\sin\alpha + \sqrt{\sin^2\alpha}\right)$ — 1
- ($\sin\alpha > 0$, dus) $20\cos\alpha\left(\sin\alpha + \sqrt{\sin^2\alpha}\right) = 40\cos\alpha\sin\alpha$ — 1
- $40\cos\alpha\sin\alpha = 20\sin(2\alpha)$ — 1
- r is maximaal als $\sin(2\alpha)$ maximaal is — 1
- ($0 < \alpha < \frac{1}{2}\pi$, dus) $\sin(2\alpha)$ is maximaal als $2\alpha = \frac{1}{2}\pi$ — 1
- Het antwoord: $\frac{1}{4}\pi$ (rad) (of 45º) — 1

Vraag	Antwoord	Scores

Even lang

10 maximumscore 4

- $\angle CZD = \angle HZG$; *overstaande hoeken* — 1
- $\angle ACB = \angle AFE = 60°$, dus $BC//HF$ (*gelijkzijdige driehoek*, *F-hoeken*) — 1
- Hieruit volgt $\angle DCZ = \angle GHZ$; *Z-hoeken* — 1
- Dus zijn de driehoeken *CDZ* en *HGZ* gelijkvormig; *hh* — 1

of

- $\Delta ADB \cong \Delta ADC$; *ZZZ* (of *ZZR,* of *ZHZ*), dus $\angle EAG = \angle FAG$ — 1
- Dus $\angle AGE = 180° - \angle EAG - \angle AEG = 180° - 30° - 60° = 90°$; *hoekensom driehoek,* (*gelijkzijdige driehoek*) — 1
- $\angle CZD = \angle HZG$; *overstaande hoeken* — 1
- (Uit $\angle CDZ = \angle HGZ$ $(= 90°)$ en $\angle CZD = \angle HZG$ volgt:) de driehoeken *CDZ* en *HGZ* zijn gelijkvormig; *hh* — 1

11 maximumscore 3

- $AG = \sqrt{3} \cdot AD = 3$ — 1
- Dus $AZ = \frac{2}{3} \cdot AG = 2$ (*zwaartelijnen driehoek*) — 1
- $DZ = AZ - AD = 2 - \sqrt{3}$ — 1

12 maximumscore 5

- Uit de genoemde gelijkvormigheid volgt $\frac{GH}{ZG} = \frac{CD}{ZD}$ — 1
- Met $ZG = 3 - 2 = 1$ geeft dit $\frac{GH}{1} = \frac{1}{2 - \sqrt{3}}$ — 1
- $EH = GH - EG = \frac{1}{2 - \sqrt{3}} - \sqrt{3}$ — 1
- $EH = \frac{1 - 2\sqrt{3} + 3}{2 - \sqrt{3}} = \frac{4 - 2\sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}} = \frac{2\left(2 - \sqrt{3}\right)}{2 - \sqrt{3}} = 2$ (dus *EH* is even lang als *AB*) — 2

of

- Uit de genoemde gelijkvormigheid volgt $\frac{GH}{ZG} = \frac{CD}{ZD}$ — 1
- Met $ZG = 3 - 2 = 1$ geeft dit $\frac{GH}{1} = \frac{1}{2 - \sqrt{3}}$ — 1
- $GH = \frac{1}{2 - \sqrt{3}} \cdot \frac{2 + \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} = 2 + \sqrt{3}$ — 2
- $EH = GH - EG = 2 + \sqrt{3} - \sqrt{3} = 2$ (dus *EH* is even lang als *AB*) — 1

Vraag	Antwoord	Scores

Gemeenschappelijk met de x-as

13 maximumscore 4

•	$f_a'(x) = 2a\cos(ax) + 2a\cos(2ax)$	2
•	De grafiek van f_a raakt de x-as in het punt $(\frac{\pi}{a}, 0)$ als $f_a'\left(\frac{\pi}{a}\right) = 0$	1
•	$f_a'\left(\frac{\pi}{a}\right) = 2a\cos\pi + 2a\cos(2\pi) = 0$ (dus de grafiek van f_a raakt de x-as in het punt $(\frac{\pi}{a}, 0)$)	1

Opmerking
Als voor a een waarde is ingevuld, voor deze vraag geen scorepunten toekennen.

14 maximumscore 5

•	Aangetoond moet worden dat $f_2(\frac{1}{2}\pi - p) = -f_2(\frac{1}{2}\pi + p)$ (voor elke waarde van p)	2
•	$f_2(\frac{1}{2}\pi - p) = 2\sin(\pi - 2p) + \sin(2\pi - 4p)$ en $f_2(\frac{1}{2}\pi + p) = 2\sin(\pi + 2p) + \sin(2\pi + 4p)$	1
•	$\sin(\pi - 2p) = \sin 2p$ en $\sin(\pi + 2p) = -\sin 2p$	1
•	$\sin(2\pi - 4p) = -\sin(4p)$ en $\sin(2\pi + 4p) = \sin(4p)$ (dus $f_2(\frac{1}{2}\pi - p) = -f_2(\frac{1}{2}\pi + p)$ voor elke waarde van p)	1

Opmerking
Als voor p een waarde is ingevuld, voor deze vraag geen scorepunten toekennen.

Vraag	Antwoord	Scores

Hoogwaterstanden

15 maximumscore 3

- De vergelijking $1 = 10^{4,3-1,9h}$ moet worden opgelost 1
- Dit geeft $4,3-1,9h=0$ (of beschrijven hoe deze vergelijking met de GR opgelost kan worden) 1
- $h \approx 2,3$ 1

16 maximumscore 3

- Na de stijging wordt $h = 2,5$ net zo vaak overschreden als $h = 2,4$ vóór de stijging werd overschreden 1
- $f(2,5) \approx 0,355$ en $f(2,4) \approx 0,550$ (of nauwkeuriger) 1
- De vermenigvuldigingsfactor is 1,5 (of nauwkeuriger) 1

of

- Het aantal keren dat de waarde $h = 2,5$ gemiddeld per jaar wordt overschreden is na de stijging $10^{1,9\,(2,5-2,4)}$ keer zo groot als vóór de stijging 2
- De vermenigvuldigingsfactor is $10^{0,19} \approx 1,5$ (of nauwkeuriger) 1

Opmerkingen
Als door tussentijds afronden de vermenigvuldigingsfactor 1,6 wordt gevonden, hiervoor geen scorepunten in mindering brengen.
Als voor h de waarden 2,6 en 2,5 gebruikt zijn in plaats van 2,5 en 2,4, voor deze vraag maximaal 2 scorepunten toekennen.

17 maximumscore 5

- $10^{-0,45} = 10^{a-b\cdot 2,5}$ geeft $-0,45 = a - b\cdot 2,5$ 1
- $0,01 = 10^{a-b\cdot 3,9}$ geeft $-2 = a - b\cdot 3,9$ 1
- Beschrijven hoe dit stelsel opgelost kan worden 1
- $b \approx 1,1$ 1
- $a \approx 2,3$ 1

Vraag	Antwoord	Scores

Koordenvierhoek

18 **maximumscore 5**

•	$\angle PQR = \angle PSR$; *constante hoek*	1
•	$\angle PQR = \angle BAR$; *Z-hoeken*	1
•	$\angle RSB = 180^\circ - \angle PSR$; *gestrekte hoek*	1
•	Uit het voorgaande volgt: $\angle RAB + \angle RSB = 180^\circ$	1
•	Dus vierhoek *ABSR* is een koordenvierhoek (*koordenvierhoek*)	1