6 Nulpunten, extremen en buigpunten

15. Dit doe je met de productregel. Er geldt:

$$f'(x) = (x^2+1)\cdot e^x + 2x\cdot e^x = (x^2+1+2x)\cdot e^x = (x+1)^2\cdot e^x.$$

16. Eerst toon je aan dat $f(x)$ geen nulpunten heeft. Hiervoor merk je op dat $x^2+1>0$ en $e^x>0$. Dit betekent dat $f(x)=(x^2+1)\cdot e^x>0$, en $f(x)$ kan dus geen nulpunten hebben. Om aan te tonen dat $f(x)$ geen extremen heeft kijk je naar de afgeleide. Het is je misschien opgevallen dat $f(x)=0$ oplossingen heeft, maar dit betekent niet dat deze oplossingen ook extremen zijn. Dit is namelijk alleen maar zo als de afgeleide daar ook van teken wisselt. Om te laten zien dat dit niet zo is merk je op dat $(x+1)^2\geq 0$ en $e^x>0$. Dit betekent namelijk dat $f'(x)=(x+1)^2\cdot e^x\geq 0$. $f'(x)$ kan dus niet van teken wisselen, en er zijn daarom geen extremen.

17. Een buigpunt is een punt waar de tweede afgeleide gelijk is aan nul. Eerst bereken je de tweede afgeleide. Denk hierbij aan de productregel en de kettingregel.

$$f''(x) = (x+1)^2\cdot e^x + 2\cdot(x+1)\cdot 1\cdot e^x = ((x+1)^2+2(x+1))\cdot e^x.$$

Je moet nu de vergelijking $f''(x)=0$ oplossen:

$$\begin{aligned}
((x+1)^2+2(x+1))\cdot e^x &= 0,\\
(x^2+2x+1+2x+2)\cdot e^x &= 0,\\
(x^2+4x+3)\cdot e^x &= 0,\\
x^2+4x+3 &= 0,\\
(x+3)(x+1) &= 0,\\
x = -3 \bigvee x &= -1.
\end{aligned}$$

Dit zijn de x-coördinaten van de buigpunten.