2 Vierkanten

5. Voor de lengte van AE geldt $|AE| = \cos\alpha$, en voor de lengte van OA geldt $|OE| = \sin\alpha$. De lengte van OE is dus gelijk aan $|OE| = |OA| + |AE| = \sin\alpha + \cos\alpha$. Invullen van $\alpha = \frac{1}{6}\pi$ geeft

$$|OE| = \sin\left(\frac{1}{6}\pi\right) + \cos\left(\frac{1}{6}\pi\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}.$$

Aangezien $OETS$ een vierkant is is de oppervlakte van $OETS$ gelijk aan

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}\right)^2 = \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{4}\sqrt{3} + \frac{3}{4} = 1 + \frac{1}{2}\sqrt{3}.$$

6. Uit de gelijkvormigheid kun je concluderen dat $\frac{|PQ|}{|CR|} = \frac{|GQ|}{|GR|}$. Uit de vorige opgave weet je dat de zijde van vierkant $OETS$ gelijk is aan $\sin\alpha + \cos\alpha$. Hiermee, en met behulp van figuur 2, kun je de lengte van CR uitrekenen:

$$|CR| = |ET| - |EH| = \sin\alpha + \cos\alpha - 1.$$

Op soortgelijke wijze vind je $|GQ|$ en $|GR|$:

$$\begin{aligned} |GQ| &= |OE| + |EF| = \sin\alpha + \cos\alpha + 1, \\ |GR| &= |GH| + |CT| = 1 + \sin\alpha. \end{aligned}$$

Invullen geeft nu:

$$\begin{aligned} \frac{|PQ|}{|CR|} &= \frac{|GQ|}{|GR|}, \\ \frac{|PQ|}{\sin\alpha + \cos\alpha - 1} &= \frac{\sin\alpha + \cos\alpha + 1}{1 + \sin\alpha}, \\ |PQ| &= \frac{(\sin\alpha + \cos\alpha - 1)(\sin\alpha + \cos\alpha + 1)}{1 + \sin\alpha}. \end{aligned}$$

7. Hiervoor gebruik je de rekenregels $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ en $2\sin\alpha\cos\alpha = \sin(2\alpha)$. Dit geeft:

$$\begin{aligned} |PQ| &= \frac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha - 1}{1 + \sin\alpha}, \\ &= \frac{1 + \sin(2\alpha) - 1}{1 + \sin\alpha}, \\ &= \frac{\sin(2\alpha)}{1 + \sin\alpha}. \end{aligned}$$

8. Uit figuur 2 is duidelijk dat de hoogte van P maximaal is als $|PQ|$ maximaal is. Om deze maximale hoogte te vinden heb je de afgeleide van $|PQ|$ nodig. Hiervoor gebruik je de kettingregel en de quotiëntregel.

$$|PQ|'(\alpha) = \frac{(1 + \sin\alpha) \cdot \cos(2\alpha) \cdot 2 - \sin(2\alpha) \cdot \cos\alpha}{(1 + \sin\alpha)^2}.$$

$|PQ|$ is maximaal als $|PQ|'(\alpha) = 0$. Om uit te vinden voor welke α dit gebeurt voer je de volgende formule in in de Ti-84 plus:

$$y_1 = \frac{(1 + \sin x) \cdot \cos(2x) \cdot 2 - \sin(2x) \cdot \cos x}{(1 + \sin x)^2}.$$

Calc zero geeft nu $\alpha = x \approx 0,67$ rad.