8 Lijnstuk en parabool

17. Het midden van PR ligt precies tussen punt $P = (0, 8)$ en punt $R = (a, 0)$, oftewel $(\frac{0+a}{2}, \frac{8+0}{2}) = (\frac{a}{2}, 4)$. Je wilt dus weten voor welke a geldt dat $f(\frac{a}{2}) = 4$:

$$\begin{aligned} 8 - \frac{1}{2}\left(\frac{a}{2}\right)^2 &= 4, \\ 8 - \frac{a^2}{8} &= 4, \\ \frac{a^2}{8} &= 4, \\ a^2 &= 32, \\ a &= \sqrt{32}, \\ a &= 4\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Merk op dat er een negatieve oplossing is, maar dat deze niet interessant is aangezien de eis is gesteld dat $a > 4$.

18. Eerst reken je de afgeleide van f uit:

$$f'(x) = -x.$$

Boog PQ heeft dus lengte

$$\int_0^4 \sqrt{1 + (-x)^2}\,\mathrm{d}x.$$

Deze integraal kun je niet met de hand uitrekenen, dus doe je het met de GR. Je voert de volgende formule in in de Ti-84 plus:

$$y_1 = \sqrt{1 + x^2}.$$

De functie calc $\int f(x)\,\mathrm{d}x$, met invulling van de grenzen 0 en 4, geeft nu dat de booglengte gelijk is aan 9,294. De lengte van lijnstuk PR kun je uitrekenen met de stelling van Pythagoras: $|PR| = \sqrt{8^2 + a^2} = \sqrt{64 + a^2}$. Je wilt nu uitrekenen voor welke a deze lengte gelijk is aan 9,294. Je lost dus de volgende vergelijking op:

$$\begin{aligned} \sqrt{64 + a^2} &= 9,294, \\ 64 + a^2 &= 9,294^2, \\ a^2 &= 9,294^2 - 64, \\ a &= \sqrt{9,294^2 - 64}, \\ a &\approx 4,73. \end{aligned}$$