5 Een hartvormige kromme

10. De y-coördinaat is maximaal als $y'(t) = 0$. Eerst reken je dus y' uit. Denk hierbij aan de kettingregel:

$$y'(t) = 2\cos t - \cos(2t)\cdot 2.$$

Nu wil je weten voor welke t deze afgeleide nul is:

$$\begin{aligned}2\cos t - 2\cos(2t) &= 0,\\ \cos t &= \cos(2t),\\ t = 2t + 2k\pi \bigvee t &= -2t + 2k\pi,\\ -t = 2k\pi \bigvee 3t &= 2k\pi,\\ t = -2k\pi \bigvee t &= \frac{2k}{3}\pi.\end{aligned}$$

Hier is k geheel. De oplossingen met t in het interval $[0, 2\pi]$ zijn $t = 0$, $t = \frac{2}{3}\pi$, $t = \frac{4}{3}\pi$ en $t = 2\pi$. Als je nu de kromme plot met de GR zie je dat het punt $t = \frac{2}{3}\pi$ overeenkomt met het maximum van y. De maximale waarde voor y krijg je nu door $t = \frac{2}{3}\pi$ in te vullen:

$$y_{\max} = 2\sin\left(\frac{2}{3}\pi\right) - \sin\left(2\cdot\frac{2}{3}\pi\right) = 2\cdot\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}\sqrt{3} = \frac{3}{2}\sqrt{3}.$$

11. Je moet eerst de vergelijking $x(t) = 1$ oplossen. Hiervoor gebruik je de regel $\cos(2t) = 2\cos^2 t - 1$.

$$\begin{aligned}2\cos t - \cos(2t) &= 1,\\ 2\cos t - 2\cos^2 t + 1 &= 1,\\ 2\cos t(1 - \cos t) &= 0,\\ 2\cos t = 0 \bigvee 1 - \cos t &= 0,\\ \cos t = 0 \bigvee \cos t &= 1,\\ t = \frac{1}{2}\pi + k\pi \bigvee t &= 2k\pi.\end{aligned}$$

Hier is k geheel. Binnen het interval $[0, 2\pi]$ zijn de oplossingen $t = 0$, $t = \frac{1}{2}\pi$, $t = \frac{3}{2}\pi$ en $t = 2\pi$. De oplossingen $t = 0$ en $t = 2\pi$ komen overeen met het beginpunt op $(1, 0)$, dus de andere punten moeten overeenkomen met de punten $(1, a)$ en $(1, -a)$. Invullen van $t = \frac{1}{2}\pi$ geeft

$$y\left(\frac{1}{2}\pi\right) = 2\sin\left(\frac{1}{2}\pi\right) - \sin(\pi) = 2\cdot 1 - 0 = 2.$$

Je hebt dus $a = 2$.