1 Eerste- en derdegraadsfunctie

1. Er is al gegeven dat in punt A geldt dat $f(0) = g(0)$. Het enige dat je nog moet aantonen is dus dat ook $f'(0) = g'(0)$. Eerst reken je beide afgeleides uit. Denk bij de afgeleide van f aan de productregel.

$$f'(x) = (x^2-1)\cdot 1 + 2x \cdot \left(x - 1\frac{1}{2}\right),$$
$$f'(0) = (0^2-1)\cdot 1 + 2\cdot 0 \cdot \left(0 - 1\frac{1}{2}\right),$$
$$f'(0) = -1 + 0 = -1.$$

Voor de afgeleide van g geldt

$$g'(x) = -1,$$
$$g'(0) = -1.$$

Er geldt inderdaad $f'(0) = g'(0)$, dus de grafieken f en g raken elkaar inderdaad in het punt A.

2. Eerst reken je de snijpunten van f met de x-as uit:

$$(x^2-1)\left(x - 1\frac{1}{2}\right) = 0,$$
$$x^2 = 1 \bigvee x = 1\frac{1}{2},$$
$$x = 1 \bigvee x = -1 \bigvee x = 1\frac{1}{2}.$$

Het snijpunt bij $x = 1$ is het snijpunt dat de rechtergrens van het linkervlak aangeeft. De oppervlakte van het linkerdeel wordt dan

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 (x^2-1)\left(x - 1\frac{1}{2}\right)\,\mathrm{d}x,\\ &= \int_0^1 x^3 - 1\frac{1}{2}x^2 - x + 1\frac{1}{2}\,\mathrm{d}x,\\ &= \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 1\frac{1}{2}x\right]_0^1,\\ &= \left(\frac{1}{4}\cdot 1^4 - \frac{1}{2}\cdot 1^3 - \frac{1}{2}\cdot 1^2 + 1\frac{1}{2}\cdot 1\right)\\ &\quad - \left(\frac{1}{4}\cdot 0^4 - \frac{1}{2}\cdot 0^3 - \frac{1}{2}\cdot 1^2 + 1\frac{1}{2}\cdot 0\right),\\ &= \frac{3}{4}.\end{aligned}$$

De totale oppervlakte van driehoek $\triangle OAB$ is gelijk aan $\frac{1}{2}\cdot 1\frac{1}{2}\cdot 1\frac{1}{2} = \frac{9}{8}$. De oppervlakte van het rechterdeel is dus $\frac{9}{8} - \frac{3}{4} = \frac{9}{8} - \frac{6}{8} = \frac{3}{8}$. De oppervlakte van het linkerdeel is dus inderdaad twee maal zo groot als die van het rechterdeel.