Verschoven platen

Op de foto's hieronder zie je een kunstwerk van de Friese kunstenaar Ids Willemsma bij het voormalige Arbeidsbureau in Heerenveen.

foto 1

foto 2

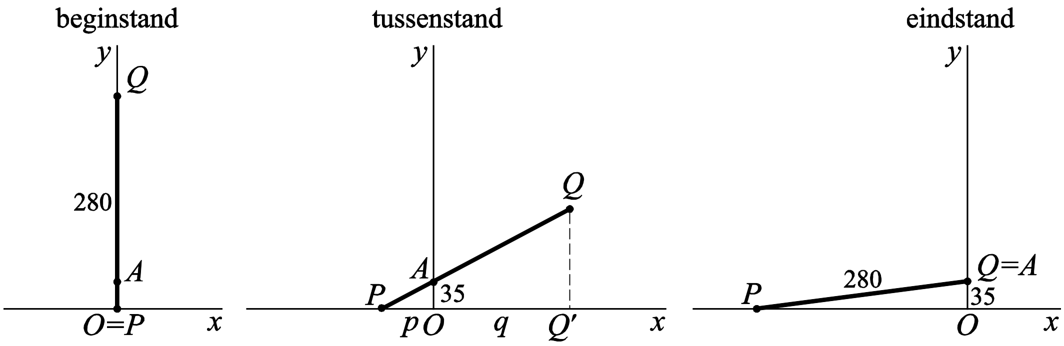
Het kunstwerk bestaat uit een aantal naast elkaar geplaatste ijzeren platen van gelijke lengte. De voorste plaat op foto 2 staat verticaal op de grond tegen een muurtje. De stand van de volgende platen is ontstaan door zo'n plaat eerst verticaal tegen het muurtje te plaatsen en daarna de onderkant over de grond te verschuiven in de richting loodrecht op het muurtje. De platen steunen steeds op de bovenkant van het muurtje.

Om te voorkomen dat voorbijgangers zich stoten aan het kunstwerk, willen we weten hoe ver de bovenkant van een verschoven plaat maximaal in horizontale richting kan uitsteken.

In deze opgave kijken we naar een model met één plaat met lengte 280 cm die steeds schuiner tegen een muurtje met hoogte 35 cm komt te staan.
In dit model wordt de plaat voorgesteld door een lijnstuk PQ. Zie de figuur op de volgende bladzijde.
Het punt waar PQ op de bovenrand van het muurtje steunt, noemen we A.
We brengen een assenstelsel aan met de x-as horizontaal door P en de y-as verticaal door A. Langs beide assen nemen we als eenheid 1 cm. De coördinaten van A zijn dus $(0, 35)$.

In de verticale beginstand van PQ bevindt punt P zich in de oorsprong en is Q het punt $(0, 280)$. Punt P wordt over de x-as naar links geschoven, terwijl lijnstuk PQ door punt A blijft gaan. In de figuur zijn de beginstand, een tussenstand en de eindstand van lijnstuk PQ getekend.

figuur



De loodrechte projectie van Q op de x-as noemen we Q'.
De afstand van P tot de oorsprong noemen we p en de afstand van Q' tot de oorsprong noemen we q. Zie de figuur.

Uitgaande van de getekende tussenstand kan q, met behulp van gelijke verhoudingen in gelijkvormige driehoeken, als volgt worden uitgedrukt in p:

$$q = \frac{280p}{\sqrt{p^2 + 1225}} - p$$

4p **13** Toon aan dat deze formule juist is.

Als we q beschouwen als functie van p, dan geldt voor de afgeleide:

$$q'(p) = \frac{343\,000}{(p^2 + 1225) \cdot \sqrt{p^2 + 1225}} - 1$$

4p **14** Toon dit aan.

6p **15** Bereken exact het maximum van q.