5 Onafhankelijk van p

11. Je wilt de oppervlakte van het grijze gebied en de oppervlakte van $OABC$ uitrekenen. Je gaat eerst kijken wat je daarvoor nodig hebt. Voor de oppervlakte van het grijze gebied heb je de x-coördinaat van A nodig. Voor de oppervlakte van $OABC$ heb je naast de x-coördinaat van A ook de y-coördinaat van T nodig. Eerst reken je de x-coördinaat van A uit:

$$\begin{aligned} f(x_A) = -x_A^3 + 3px_A^2 &= 0, \\ x_A^3 &= 3px_A^2, \\ x_A &= 3p. \end{aligned}$$

Bij de stap waar je door x_A^2 deelt aan beide kanten is er officieel ook nog de oplossing $x_A^2 = 0$, maar hier ben je niet in geïnteresseerd aangezien dit niet overeenkomt met het punt A. Nu ga je de y-coördinaat van T uitrekenen. Hiervoor heb je eerst de x-coördinaat van T nodig, en deze vind je door de afgeleide van f gelijk te stellen aan nul. De afgeleide is

$$f'(x) = -3x^2 + 3 \cdot 2px = -3x^2 + 6px.$$

De x-coördinaat van T is nu

$$\begin{aligned} f'(x_T) = -3x_T^2 + 6px_T &= 0, \\ 3x_T^2 &= 6px_T, \\ x_T &= 2p. \end{aligned}$$

Hier is er weer een oplossing $x_T = 0$, maar deze negeer je weer om dezelfde reden als eerst. Nu kun je de y-coördinaat van T uitrekenen:

$$y_T = f(x_T) = -(2p)^3 + 3p(2p)^2 = -8p^3 + 12p^3 = 4p^3.$$

Nu kun je de oppervlakte van $OABC$ uitrekenen. Deze is namelijk

$$O_{OABC} = x_A \cdot y_T = 3p \cdot 4p^3 = 12p^4.$$

Vervolgens reken je de oppervlakte van het grijze gebied uit. Deze is gelijk aan

$$\begin{aligned} O_{\text{grijs}} &= \int_0^{x_A} f(x)\,\mathrm{d}x, \\ &= \int_0^{3p} -x^3 + 3px^2\,\mathrm{d}x, \\ &= \left[-\frac{x^4}{4} + px^3\right]_0^{3p}, \\ &= -\frac{(3p)^4}{4} + p(3p)^3, \\ &= -\frac{81}{4}p^4 + 27p^4, \\ &= \frac{27}{4}p^4. \end{aligned}$$

Tenslotte kun je de verhouding tussen O_{grijs} en O_{OABC} uitrekenen. Je vindt dan

$$\frac{O_{\text{grijs}}}{O_{OABC}} = \frac{\frac{27}{4}p^4}{12p^4} = \frac{27}{48} = \frac{9}{16}.$$

Dit is inderdaad onafhankelijk van p.