2 Een ellipsvormige baan

3. De afstand van het punt P tot de oorsprong reken je uit met de stelling van Pythagoras. Dit geeft dat de afstand d gelijk is aan

$$d = \sqrt{(x(t))^2 + (y(t))^2} = \sqrt{\left(\tfrac{1}{2}\sin t\right)^2 + \left(\sin(t + \tfrac{1}{3}\pi)\right)^2}.$$

Het maximum van deze functie reken je uit met de GR. Je voert de volgende formule in in de Ti-84 plus:

$$y_1 = \sqrt{\left(\tfrac{1}{2}\sin x\right)^2 + \left(\sin(x + \tfrac{1}{3}\pi)\right)^2}.$$

Nu vind je met calc maximum dat $t = x \approx 1,04$.

4. Eerst reken je de afgeleides van $x(t)$ en $y(t)$ uit. Hier moet je voor y de kettingregel toepassen, maar de afgeleide van het argument van de sinus is gelijk aan 1, dus als je het vergeet maakt het hier niets uit.

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \tfrac{1}{2}\cos t,$$
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \cos(t + \tfrac{1}{3}\pi).$$

Nu reken je deze afgeleides uit bij $t = 0$. Dan vind je

$$\left.\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = \tfrac{1}{2}\cos 0 = \tfrac{1}{2},$$
$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = \cos(\tfrac{1}{3}\pi) = \tfrac{1}{2}.$$

De snelheid van P bij $t = 0$ is dus gelijk aan

$$\sqrt{\left(\left.\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}\right)^2 + \left(\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}.$$

5. Je rekent eerst uit voor welke t geldt dat $y = 2x$. Je moet dus de volgende vergelijking oplossen:

$$2 \cdot \frac{1}{2}\sin t = \sin(t + \tfrac{1}{3}\pi),$$
$$\sin t = \sin(t + \tfrac{1}{3}\pi),$$
$$t = t + \tfrac{1}{3}\pi + 2\pi k \bigvee t = \pi - (t + \tfrac{1}{3}\pi) + 2\pi k,$$
$$0 = \tfrac{1}{3}\pi + 2\pi k \bigvee 2t = \tfrac{2}{3}\pi + 2\pi k,$$
$$\text{geen oplossingen} \bigvee t = \tfrac{1}{3}\pi + \pi k.$$

Hier is k een geheel getal. De linker mogelijkheid bleek geen oplossingen te geven aangezien deze oplossing leidt tot $k = -\frac{1}{6}$, wat niet kan. De rechter mogelijkheid geeft voor $0 \leq t \leq 2\pi$ de oplossingen $t = \frac{1}{3}\pi$ en $t = \frac{4}{3}\pi$. Het punt $t = \frac{1}{3}\pi$ geeft de coördinaten

$$(x(\tfrac{1}{3}\pi), y(\tfrac{1}{3}\pi)) = \left(\frac{1}{2}\sin(\tfrac{1}{3}\pi), \sin(\tfrac{2}{3}\pi)\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Dit is het punt A. Het punt B komt overeen met $t = \frac{4}{3}\pi$:

$$(x(\tfrac{4}{3}\pi), y(\tfrac{4}{3}\pi)) = \left(\frac{1}{2}\sin(\tfrac{4}{3}\pi), \sin(\tfrac{5}{3}\pi)\right) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{4}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$