

Een benadering van een nulpunt

Voor elke positieve startwaarde x_0 is een rij x_0, x_1, x_2, \dots gegeven door de

volgende recursievergelijking: $x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n + \frac{1}{x_n}$.

Deze recursievergelijking kunnen we ook schrijven als $x_{n+1} = g(x_n)$, waarbij

$$g(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{x} \quad \text{met } x > 0.$$

In de figuur op de uitwerkbijlage zijn de grafiek van g en de lijn $y = x$ getekend.

In deze figuur is op de x -as een getal x_0 gekozen.

- 3p **1** Teken in deze figuur met behulp van een webgrafiek de bijbehorende plaatsen van x_1 en x_2 op de x -as.

De rij x_0, x_1, x_2, \dots convergeert. De grafiek van g heeft één top.

- 5p **2** Toon aan dat de limiet van de rij x_0, x_1, x_2, \dots exact gelijk is aan de x -coördinaat van de top van de grafiek van g .

Een nulpunt van een functie f kan in het algemeen snel benaderd worden met

de recursievergelijking $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ bij een geschikte keuze van x_0 .

Deze benaderingsmethode noemt men de methode van Newton-Raphson.

Passen we deze methode toe voor een benadering van het nulpunt $\sqrt{2}$ van

$$f(x) = x^2 - 2 \quad \text{dan volgt hieruit de gegeven recursievergelijking } x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n + \frac{1}{x_n}.$$

- 4p **3** Toon aan dat deze laatste vergelijking volgt uit de vergelijking $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$.

uitwerkbijlage

1

