1 Een rij

1. In de limiet geldt dat $u_{n-1} = u_n$. Dit vul je in in de recursievergelijking. Je krijgt dan:

$$u_n = \frac{1}{2 - u_n}$$

Nu hoef je alleen nog maar deze vergelijking op te lossen om u_n te vinden.

$$\begin{aligned} 2u_n - u_n^2 &= 1 \\ u_n^2 - 2u_n + 1 &= 0 \\ (u_n - 1)(u_n - 1) &= 0 \\ u_n = 1 \bigvee u_n &= 1 \end{aligned}$$

Deze vergelijking heeft dus maar een oplossing: $u_n = 1$. De limiet van deze rij is dus $u_n = 1$.

2. Als de vergelijking $u_n = \frac{n+1}{n+2}$ geldt, dan geldt dit ook:

$$\begin{aligned} u_{n-1} &= \frac{(n-1)+1}{(n-1)+2} \\ u_{n-1} &= \frac{n}{n+1} \end{aligned}$$

Als de voorgestelde formule klopt, moet hij voldoen aan de volgende vergelijking:

$$u_n = \frac{1}{2 - u_{n-1}}$$

Je weet wat u_n is volgens de voorgestelde formule, en je weet ook wat u_{n-1} is volgens de voorgestelde formule. Deze dingen kun je invullen:

$$\frac{n+1}{n+2} \stackrel{?}{=} \frac{1}{2 - \frac{n}{n+1}}$$

Nu moet je checken of deze vergelijking daadwerkelijk klopt. Vandaar ook het vraagteken, want nu weet je nog niet dat het klopt. Eerst vermenigvuldig ik aan de rechterkant de teller en de noemer allebei met $n + 1$.

$$\begin{aligned} \frac{n+1}{n+2} &\stackrel{?}{=} \frac{1}{2 - \frac{n}{n+1}} \cdot \frac{n+1}{n+1} \\ \frac{n+1}{n+2} &\stackrel{?}{=} \frac{n+1}{2(n+1) - n} \\ \frac{n+1}{n+2} &\stackrel{?}{=} \frac{n+1}{2n+2-n} \\ \frac{n+1}{n+2} &= \frac{n+1}{n+2} \end{aligned}$$

Dit klopt, dus de voorgestelde vergelijking voldoet aan de recursievergelijking.