

### Bewegende schaduw

Bij een practicumproef draait een doorzichtige cirkelvormige schijf in een verticaal vlak om zijn middelpunt  $M$ . Deze schijf heeft een straal van 1 meter. Tussen twee punten op de rand van de schijf wordt een staaf  $AB$  met lengte 1 meter bevestigd. De punten op de rand van de schijf hebben een constante snelheid van 1 m/s. Het geheel wordt beschenen door een bundel verticaal invallende evenwijdige lichtstralen. In deze opgave bekijken we de lengte van de schaduw  $A'B'$  van de staaf op de grond.

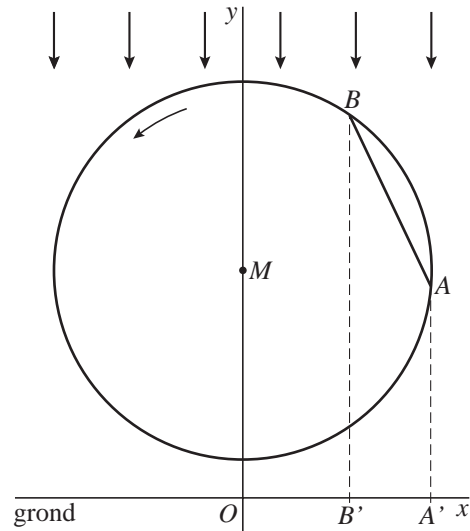
We maken een wiskundig model bij deze proef. We kiezen het assenstelsel in het draaivlak van de schijf, met de  $x$ -as langs de grond en de  $y$ -as door het middelpunt  $M$  van de schijf. De bewegingsvergelijkingen van  $A$  en  $B$  zijn:

$$\begin{cases} x_A = \cos(t - \frac{1}{6}\pi) \\ y_A = 1\frac{1}{5} + \sin(t - \frac{1}{6}\pi) \end{cases} \text{ en } \begin{cases} x_B = \cos(t + \frac{1}{6}\pi) \\ y_B = 1\frac{1}{5} + \sin(t + \frac{1}{6}\pi) \end{cases}$$

Hierbij zijn  $x$  en  $y$  in meter en is  $t$  in seconde.

In figuur 3 staat een vooraanzicht van de situatie op een zeker tijdstip.

**figuur 3**



De lengte (in meter) van de schaduw  $A'B'$  op tijdstip  $t$  noemen we  $l(t)$ .

Voor elke waarde van  $t$  tussen 0 en  $\pi$  geldt:  $l(t) = \sin t$ .

- 5p **6** Toon dit langs algebraïsche weg aan.

Om de gemiddelde schaduwlengte  $g$  van  $AB$  (in meter) te berekenen, kunnen we ons beperken tot een halve omwenteling:  $0 \leq t \leq \pi$ .

$g$  kan berekend worden met een integraal:  $g = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} l(t) dt$ .

Er geldt:  $g = \frac{2}{\pi}$ .

- 4p **7** Toon dit langs algebraïsche weg aan.

We vergelijken de delen van de omwentelingstijd waarvoor  $l(t) > \frac{2}{\pi}$  en waarvoor  $l(t) < \frac{2}{\pi}$ . We kunnen ons weer beperken tot een halve omwenteling:  $0 \leq t \leq \pi$ .

- 5p **8** Onderzoek of deze delen even groot zijn.