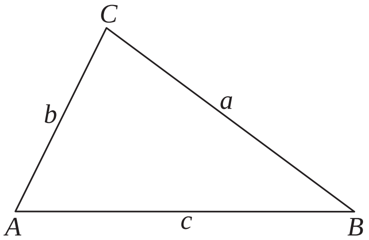
De formule van Heron

In de eerste eeuw van onze jaartelling schreef de Egyptenaar Heron een werk waarin hij een formule gaf voor de oppervlakte van een driehoek. Hij deed dit als volgt.
Noem de lengtes van de zijden van de driehoek a, b en c. Zie figuur 1.

figuur 1



Noem de halve omtrek van de driehoek s. Dus $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$.

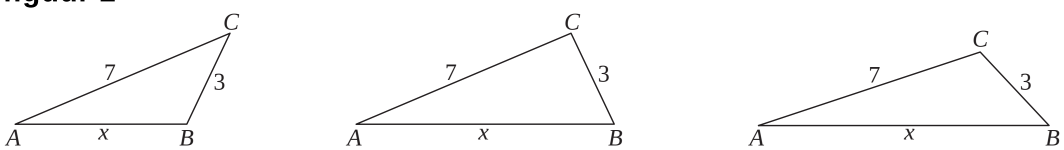
Een formule voor de oppervlakte H van de driehoek is dan:
$H = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

Deze formule wordt *de formule van Heron* genoemd.

4p **3** Toon aan dat deze formule de juiste uitkomst geeft voor de oppervlakte van een rechthoekige driehoek met zijden 3, 4 en 5.

In het vervolg van deze opgave gebruiken we dat de formule van Heron voor elke driehoek geldt.
We bekijken driehoeken ABC met $AC = 7$ en $BC = 3$. De lengte van de derde zijde AB noemen we x, met $4 < x < 10$. In figuur 2 zijn drie van dergelijke driehoeken getekend.

figuur 2



Voor de oppervlakte H van zo'n driehoek ABC geldt:

$H(x) = \sqrt{\left(25 - \frac{1}{4}x^2\right)\left(\frac{1}{4}x^2 - 4\right)}$

5p **4** Toon dit aan met behulp van de formule van Heron.

Er is één waarde van x waarvoor de oppervlakte van driehoek ABC maximaal is. Voor deze waarde van x is $(25 - \frac{1}{4}x^2)(\frac{1}{4}x^2 - 4)$ maximaal.

4p **5** Bereken met behulp van differentiëren deze waarde van x exact.