

## 4 Beoordelingsmodel

Vraag	Antwoord	Scores
-------	----------	--------

### Podiumverlichting

#### 1 maximumscore 3

- $\sin \alpha = \frac{x}{r}$  1

- $V = 650 \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{x}{r} = \frac{650x}{r^2}$  1

- $r^2 = 9 + x^2$  invullen geeft  $V = \frac{650x}{9 + x^2}$  1

of

- $\sin \alpha = \frac{x}{r}$  1

- $r = \sqrt{9 + x^2}$  1

- $V = 650 \cdot \frac{1}{\sqrt{9 + x^2}} \cdot \frac{x}{\sqrt{9 + x^2}} = \frac{650x}{9 + x^2}$  1

#### 2 maximumscore 5

- $\frac{650x}{9 + x^2} = 100$  geeft  $x^2 - 6,5x + 9 = 0$  2

- $(x - 2)(x - 4,5) = 0$  (of de abc-formule gebruiken of kwadraat afsplitsen) 1

- De oplossingen  $x = 2$  en  $x = 4,5$  1

- De hoogte moet minstens 2 meter en hoogstens 4,5 meter zijn 1

#### 3 maximumscore 6

- $V' = \frac{650(9 + x^2) - 650x \cdot 2x}{(9 + x^2)^2}$  2

- Als  $V$  maximaal is, is  $V'$  gelijk aan 0 1

- $V' = 0$  geeft  $x^2 = 9$  2

- De hoogte is 3 meter 1

Vraag	Antwoord	Score
-------	----------	-------

## Krasbal

### 4 maximumscore 4

- Het aantal verschillende speelvelden is  $\binom{8}{4}$  1
- Het aantal verschillende scoringsvelden is  $\binom{4}{2}$  1
- Het aantal verschillende krasbalkaarten is  $\binom{8}{4} \cdot \binom{4}{2}$  1
- Dit is  $70 \cdot 6 = 420$  1

### 5 maximumscore 4

- De wedstrijden met lengte 4 zijn VVPD en PMPD 1
- De kans op VVPD is  $\frac{4}{8} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{2}{5}$  1
- De kans op PMPD is  $\frac{4}{8} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{5}$  1
- Het antwoord  $\frac{1}{14} + \frac{1}{14} = \frac{1}{7}$  (of ongeveer 0,14) 1

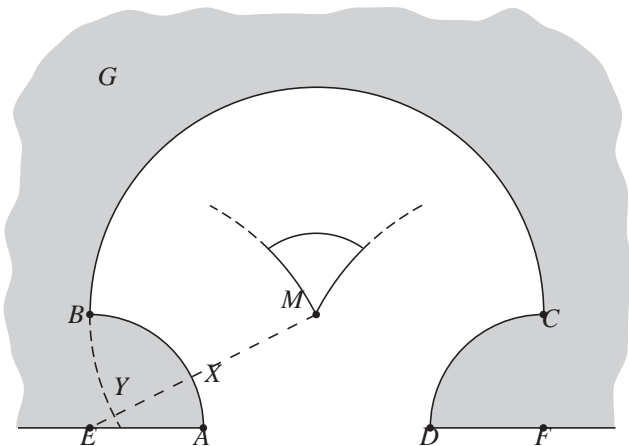
### 6 maximumscore 4

- Veronderstel dat Ruud eerlijk speelt, dus met kans  $\frac{1}{2}$  als eerste vakje een P open krast 1
- Het aantal keren  $X$  dat Ruud als eerste een vakje P open krast is dan binomiaal verdeeld met  $n = 10$  en  $p = \frac{1}{2}$  1
- Beschrijven hoe  $P(X \geq 8 \mid n = 10 \text{ en } p = \frac{1}{2})$  met de GR berekend kan worden 1
- Deze kans is (ongeveer) 0,055 1

Vraag	Antwoord	Scores
-------	----------	--------

## Cirkelinham

### 7 maximumscore 4



- Het tekenen van cirkelbogen door  $M$  met middelpunten  $E$  en  $F$  2
- De afstand tot boog  $BC$  moet gelijk zijn aan  $MX$ , waarbij  $X$  het snijpunt is van  $ME$  en cirkelboog  $AB$  1
- Het tekenen van de cirkelboog met middelpunt  $M$  en straal  $6 - MX \approx 6 - 3,7 = 2,3$ , met de juiste eindpunten 1

of

- Het tekenen van cirkelbogen door  $M$  met middelpunten  $E$  en  $F$  2
- De derde cirkelboog heeft middelpunt  $M$  en straal  $XY$ , waarbij  $X$  het snijpunt is van  $ME$  en cirkelboog  $AB$  en  $Y$  het snijpunt is van  $ME$  en het verlengde van cirkelboog  $CB$  1
- Het tekenen van deze cirkelboog, met de juiste eindpunten 1

### 8 maximumscore 4

- $d(L, \text{boog } BC) = d(L, \text{boog } AB)$  1
- $d(L, \text{boog } BC) = 6 - LM$  1
- $d(L, \text{boog } AB) = LE - 3$  1
- Combinatie van het bovenstaande geeft  $6 - LM = LE - 3$ , dus  $LM + LE = 9$  1

of

- Als  $L$  in  $B$  ligt, is de som van de afstanden  $6 + 3 = 9$  1
- Als  $L$  verder schuift, neemt  $LE$  evenveel toe als  $LM$  afneemt, met toelichting 2
- Dus geldt voor alle punten  $L$ :  $LM + LE = 9$  1

*Opmerking*

*Als alleen getallenvoorbeelden gegeven zijn, hiervoor maximaal 1 punt toekennen.*

Vraag	Antwoord	Scores
<b>9</b>	<b>maximumscore 4</b>	
	• Het gebruik van de rechthoekige driehoek <i>ETS</i>	1
	• Als $MS = x$ , dan $ES = 9 - x$ en $ST = 3 + x$	1
	• De stelling van Pythagoras geeft: $(9 - x)^2 = 6^2 + (3 + x)^2$	1
	• $x = 1\frac{1}{2}$	1
	of	
	• $d(S, \text{boog } AB) = d(S, \text{boog } BC) = d(S, \text{boog } CD)$ ; noem deze afstand $a$	1
	• $SE = 3 + a$ en $ST = 9 - a$	1
	• De stelling van Pythagoras geeft: $(3 + a)^2 = 6^2 + (9 - a)^2$	1
	• $a = 4\frac{1}{2}$ , dus $ST = 9 - 4\frac{1}{2} = 4\frac{1}{2}$ en $MS = 4\frac{1}{2} - 3 = 1\frac{1}{2}$	1

### De functie $f(x) = e^x$

**10 maximumscore 4**

- De oppervlakte is  $1 \cdot e^{a+1} - \int_a^{a+1} e^x dx$  1
  - $\int_a^{a+1} e^x dx = e^{a+1} - e^a$  1
  - De oppervlakte is  $e^{a+1} - (e^{a+1} - e^a) = e^a$  1
  - $e^a = 3$  dus  $a = \ln 3$  1
- of
- De oppervlakte is  $\int_a^{a+1} (e^{a+1} - e^x) dx$  1
  - Een primitieve is  $e^{a+1} \cdot x - e^x$  1
  - De oppervlakte is  $e^{a+1}(a+1) - e^{a+1} - (e^{a+1} \cdot a - e^a) = e^a$  1
  - $e^a = 3$  dus  $a = \ln 3$  1

**11 maximumscore 4**

- De richtingscoëfficiënt van  $AB$  is  $\frac{e^{a+1} - e^a}{a+1 - a}$  ( $= e^{a+1} - e^a$ ) 2
- Beschrijven hoe de vergelijking  $e^{a+1} - e^a = 1$  met de GR of algebraïsch opgelost kan worden 1
- Het antwoord:  $a < -0,54$  1

Vraag	Antwoord	Scores
<b>12</b>	<b>maximumscore 4</b>	
	<ul style="list-style-type: none"> <li>De lengte is <math>\int_1^2 \sqrt{1+(e^x)^2} dx</math></li> </ul>	2
	<ul style="list-style-type: none"> <li>Beschrijven hoe deze integraal met de GR kan worden berekend</li> </ul>	1
	<ul style="list-style-type: none"> <li>Het antwoord: ongeveer 4,79</li> </ul>	1
<b>13</b>	<b>maximumscore 6</b>	
	<ul style="list-style-type: none"> <li>Het omwentelingslichaam van het stuk onder de grafiek van <math>f</math> heeft inhoud <math>\pi \cdot \int_0^1 e^{2x} dx</math></li> </ul>	1
	<ul style="list-style-type: none"> <li>Een primitieve functie van <math>e^{2x}</math> is <math>\frac{1}{2}e^{2x}</math></li> </ul>	1
	<ul style="list-style-type: none"> <li>Het omwentelingslichaam van het stuk onder de grafiek van <math>f</math> heeft inhoud <math>\frac{1}{2}\pi(e^2 - 1)</math></li> </ul>	1
	<ul style="list-style-type: none"> <li>Het omwentelingslichaam van de hele rechthoek heeft inhoud <math>\pi \cdot e^2 \cdot 1</math></li> </ul>	1
	<ul style="list-style-type: none"> <li>Het omwentelingslichaam van het stuk tussen de lijn <math>y = e</math> en de grafiek van <math>f</math> heeft inhoud <math>\pi e^2 - \frac{1}{2}\pi(e^2 - 1) = \frac{1}{2}\pi(e^2 + 1)</math></li> </ul>	1
	<ul style="list-style-type: none"> <li>Het verschil tussen de inhouden is <math>\pi</math></li> </ul>	1
	of	
	<ul style="list-style-type: none"> <li>Het omwentelingslichaam van het stuk onder de grafiek van <math>f</math> heeft inhoud <math>\pi \cdot \int_0^1 e^{2x} dx</math></li> </ul>	1
	<ul style="list-style-type: none"> <li>Een primitieve functie van <math>e^{2x}</math> is <math>\frac{1}{2}e^{2x}</math></li> </ul>	1
	<ul style="list-style-type: none"> <li>Het omwentelingslichaam van het stuk onder de grafiek van <math>f</math> heeft inhoud <math>\frac{1}{2}\pi(e^2 - 1)</math></li> </ul>	1
	<ul style="list-style-type: none"> <li>Het omwentelingslichaam van het stuk tussen de lijn <math>y = e</math> en de grafiek van <math>f</math> heeft inhoud <math>\pi \int_0^1 (e^2 - e^{2x}) dx</math></li> </ul>	1
	<ul style="list-style-type: none"> <li>De inhoud van dit omwentelingslichaam is <math>\frac{1}{2}\pi(e^2 + 1)</math></li> </ul>	1
	<ul style="list-style-type: none"> <li>Het verschil tussen de inhouden is <math>\pi</math></li> </ul>	1

*Opmerking*

Als  $\pi \int_0^1 (e - e^x)^2 dx$  is berekend, maximaal 3 punten toekennen.

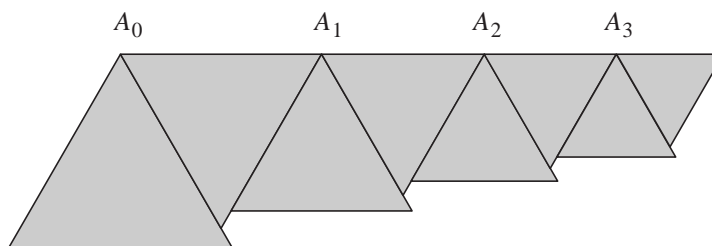
Vraag

Antwoord

Scores

## Driehoeken plakken

### 14 maximumscore 6



- $A_{n-1}A_n = 2,7 \cdot (0,81)^{n-1}$  cm ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) 2
  - $A_0A_n = 2,7 \cdot \frac{1-0,81^n}{1-0,81}$  cm (of beschrijven hoe  $A_0A_n$  voor verschillende waarden van  $n$  met de GR berekend kan worden) 2
  - Aantonen dat  $A_0A_n$  groter wordt dan 14 cm (namelijk als  $n \geq 20$ ) (dus de figuur overschrijdt de finishlijn) 2
- of
- $A_{n-1}A_n = 2,7 \cdot (0,81)^{n-1}$  cm ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) 2
  - De limiet van de somrij is  $\frac{2,7}{1-0,81}$  cm 2
  - Dit is groter dan 14 cm (dus de figuur overschrijdt de finishlijn) 2

Vraag	Antwoord	Scores
-------	----------	--------

## Brievenweger

### 15 maximumscore 3

- De draaihoek is ongeveer  $30^\circ$  1
  - $\alpha \approx \frac{1}{6}\pi$  1
  - Invullen geeft  $y \approx 36$  1
- of
- De draaihoek is ongeveer  $30^\circ$  1
  - $\frac{1}{4}\pi \text{ rad} = 45^\circ$  1
  - $y \approx 70 \frac{\sin(30^\circ)}{\sin(30^\circ + 45^\circ)} \approx 36$  1

*Opmerking*

*Als gewerkt wordt met  $\sin(30^\circ + \frac{1}{4}\pi)$ , maximaal 1 punt toekennen.*

### 16 maximumscore 4

- $70 \frac{\sin \alpha}{\sin(\alpha + \frac{1}{4}\pi)} = 70$ , dus  $\sin(\alpha + \frac{1}{4}\pi) = \sin \alpha$  1
- $\alpha + \frac{1}{4}\pi = \pi - \alpha$  2
- $\alpha = \frac{3}{8}\pi$  1

### 17 maximumscore 4

- $\frac{dy}{d\alpha} = 70 \cdot \frac{\cos \alpha \cdot \sin(\alpha + \frac{1}{4}\pi) - \sin \alpha \cdot \cos(\alpha + \frac{1}{4}\pi)}{\sin^2(\alpha + \frac{1}{4}\pi)}$  2
- $\cos \alpha \cdot \sin(\alpha + \frac{1}{4}\pi) - \sin \alpha \cdot \cos(\alpha + \frac{1}{4}\pi) = \sin(\alpha + \frac{1}{4}\pi - \alpha)$  1
- $\frac{dy}{d\alpha} = 70 \cdot \frac{\sin(\alpha + \frac{1}{4}\pi - \alpha)}{\sin^2(\alpha + \frac{1}{4}\pi)} = \frac{70 \sin(\frac{1}{4}\pi)}{\sin^2(\alpha + \frac{1}{4}\pi)}$  1

of

- $\frac{dy}{d\alpha} = 70 \cdot \frac{\cos \alpha \cdot \sin(\alpha + \frac{1}{4}\pi) - \sin \alpha \cdot \cos(\alpha + \frac{1}{4}\pi)}{\sin^2(\alpha + \frac{1}{4}\pi)}$  2
- $\sin(\alpha + \frac{1}{4}\pi) = \sin \alpha \cdot \cos(\frac{1}{4}\pi) + \cos \alpha \cdot \sin(\frac{1}{4}\pi)$  en  
 $\cos(\alpha + \frac{1}{4}\pi) = \cos \alpha \cdot \cos(\frac{1}{4}\pi) - \sin \alpha \cdot \sin(\frac{1}{4}\pi)$  invullen 1
- Dit geeft  $\frac{dy}{d\alpha} = 70 \cdot \frac{\sin(\frac{1}{4}\pi) \cdot (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha)}{\sin^2(\alpha + \frac{1}{4}\pi)} = \frac{70 \sin(\frac{1}{4}\pi)}{\sin^2(\alpha + \frac{1}{4}\pi)}$  1

Vraag	Antwoord	Scores
<b>18</b>	<b>maximumscore 3</b>	
	<ul style="list-style-type: none"> <li><math>\frac{dy}{d\alpha}</math> is minimaal als <math>\sin^2(\alpha + \frac{1}{4}\pi)</math> maximaal is</li> </ul>	1
	<ul style="list-style-type: none"> <li><math>\sin^2(\alpha + \frac{1}{4}\pi)</math> is maximaal als <math>\sin(\alpha + \frac{1}{4}\pi) = 1</math></li> </ul>	1
	<ul style="list-style-type: none"> <li>Dit is het geval als <math>\alpha = \frac{1}{4}\pi \approx 0,79</math></li> </ul>	1
	of	
	<ul style="list-style-type: none"> <li>Beschrijven hoe met de GR de waarde van <math>\alpha</math> gevonden kan worden</li> </ul>	
	waarvoor $\frac{70\sin(\frac{1}{4}\pi)}{\sin^2(\alpha + \frac{1}{4}\pi)}$ minimaal is	2
	<ul style="list-style-type: none"> <li><math>\alpha \approx 0,79</math></li> </ul>	1
	of	
	<ul style="list-style-type: none"> <li><math>\frac{d}{d\alpha} \left( \frac{70\sin(\frac{1}{4}\pi)}{\sin^2(\alpha + \frac{1}{4}\pi)} \right) = 70\sin(\frac{1}{4}\pi) \cdot \frac{-2\cos(\alpha + \frac{1}{4}\pi)}{\sin^3(\alpha + \frac{1}{4}\pi)}</math></li> </ul>	1
	<ul style="list-style-type: none"> <li>Voor de gezochte waarde van <math>\alpha</math> is <math>\frac{d}{d\alpha} \left( \frac{70\sin(\frac{1}{4}\pi)}{\sin^2(\alpha + \frac{1}{4}\pi)} \right)</math> gelijk aan 0, dus</li> </ul>	
	$\cos(\alpha + \frac{1}{4}\pi) = 0$	1
	<ul style="list-style-type: none"> <li>Dit is het geval als <math>\alpha = \frac{1}{4}\pi \approx 0,79</math></li> </ul>	1

*Opmerking*

*Gezien de context is het niet nodig aan te tonen dat de extreme waarde een minimum is.*

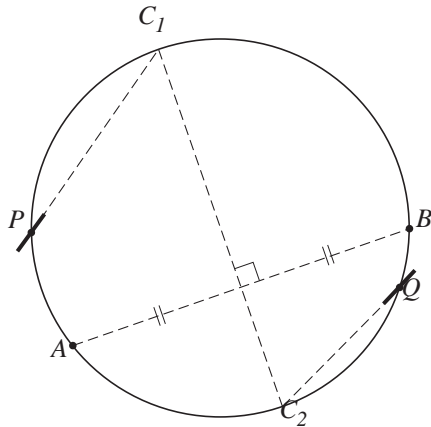
## Spiegeltjes op een cirkel

<b>19</b>	<b>maximumscore 4</b>	
	<ul style="list-style-type: none"> <li><math>ABCS</math> is een koordenvierhoek, dus <math>\angle ABC = 180^\circ - \angle ASC</math></li> </ul>	1
	<ul style="list-style-type: none"> <li><math>\alpha = 180^\circ - \angle ASC</math>, dus <math>\angle ABC = \alpha</math>; <i>gestrekte hoek</i></li> </ul>	1
	<ul style="list-style-type: none"> <li><math>\angle BAC = \angle BSC = \beta</math>; <i>stelling van de constante hoek</i></li> </ul>	1
	<ul style="list-style-type: none"> <li><math>\alpha = \beta</math>, dus <math>\angle ABC = \angle BAC</math></li> </ul>	1
	of	
	<ul style="list-style-type: none"> <li><math>\angle ASB = \angle ACB</math>; <i>stelling van de constante hoek</i></li> </ul>	1
	<ul style="list-style-type: none"> <li><math>\angle ASB = 180^\circ - (\alpha + \beta) = 180^\circ - 2\beta</math>; <i>gestrekte hoek</i></li> </ul>	1
	<ul style="list-style-type: none"> <li><math>\angle ACB = 180^\circ - \angle BAC - \angle ABC</math>; <i>hoekensom driehoek</i></li> </ul>	1
	<ul style="list-style-type: none"> <li>Combineren geeft <math>2\beta = \angle BAC + \angle ABC = \beta + \angle ABC</math>; <i>stelling van de constante hoek</i>, dus <math>\angle ABC = \beta = \angle BAC</math></li> </ul>	1



Vraag	Antwoord	Scores
-------	----------	--------

20 maximumscore 4



- De snijpunten  $C_1$  en  $C_2$  van de middelloodlijn van  $AB$  met de cirkel tekenen 2
  - De juiste stand van beide spiegeltjes in de richting van  $C_1$  of  $C_2$  tekenen 2
- of
- Een snijpunt  $C$  van de middelloodlijn van  $AB$  met de cirkel tekenen 1
  - In het juiste punt het spiegeltje in de richting van  $C$  tekenen 1
  - In het juiste punt het spiegeltje loodrecht op de richting naar  $C$  tekenen 2

*Opmerkingen*

*Als de stand op een andere manier gevonden is, bijvoorbeeld door de deellijnen van  $\angle APB$  en  $\angle AQB$  te tekenen en de spiegeltjes loodrecht op deze deellijn te tekenen, geen punten toekennen.*

*Als één spiegeltje goed getekend is en de andere fout (bijvoorbeeld naar het verkeerde snijpunt van de middelloodlijn en de cirkel), maximaal 2 punten toekennen.*