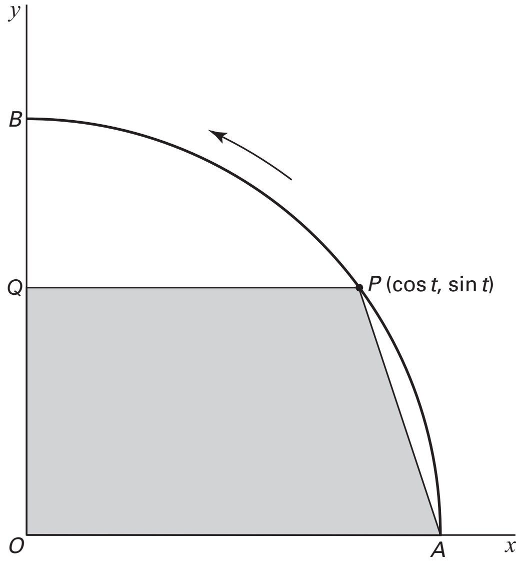
Oppervlakte van een trapezium

In figuur 7 staat een kwart van de eenheidscirkel, met $O(0, 0)$, $A(1, 0)$ en $B(0, 1)$.
Op tijdstip $t = 0$ start een punt P in A en beweegt langs cirkelboog AB; op tijdstip t heeft P de coördinaten $(\cos t, \sin t)$. Q is de loodrechte projectie van P op de y-as.
We bekijken de oppervlakte V van het trapezium $OAPQ$ op tijdstip t, waarbij t in het interval $\langle 0, \frac{1}{2}\pi \rangle$ ligt.

figuur 7



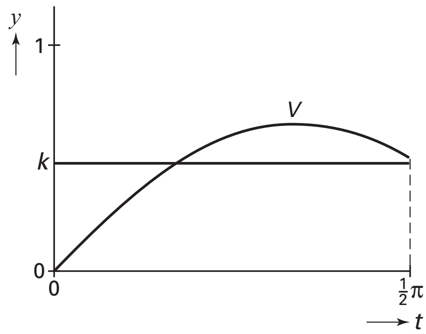
De oppervlakte V van het trapezium is $\frac{1}{2}\sin t + \frac{1}{4}\sin 2t$.

4p **12** ☐ Toon dit aan.

5p **13** ☐ Bereken met behulp van differentiëren voor welke waarde van t de oppervlakte V maximaal is.

De oppervlakte van het trapezium $OAPQ$ verandert op het tijdsinterval $\langle 0, \frac{1}{2}\pi \rangle$ voortdurend. In figuur 8 is de grafiek getekend van V als functie van t op dit tijdsinterval.
De gemiddelde oppervlakte van het trapezium $OAPQ$ over het tijdsinterval $\langle 0, \frac{1}{2}\pi \rangle$ noemen we k. In figuur 8 is de lijn $y = k$ getekend.
Er geldt: de oppervlakte van het gebied dat wordt ingesloten door de grafiek van V, de t-as en de lijn $t = \frac{1}{2}\pi$ is gelijk aan de oppervlakte van het gebied dat wordt ingesloten door de horizontale lijn $y = k$, de t-as, de y-as en de lijn $t = \frac{1}{2}\pi$.

figuur 8



6p **14** ☐ Bereken met behulp van integreren de exacte waarde van k.