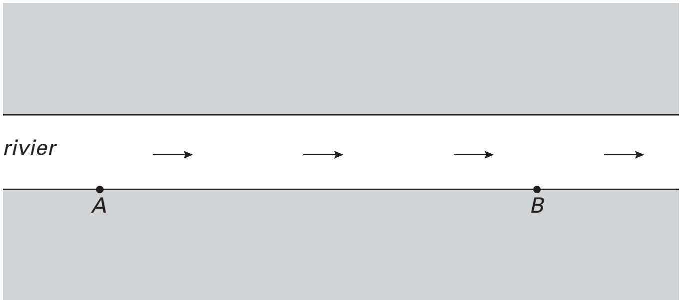
Reistijd

figuur 1



Een boot vaart op een rivier van A naar B en terug. De afstand tussen A en B is 10 km. De boot vaart altijd met een snelheid van 20 km/u ten opzichte van het water. De rivier stroomt in de richting van A naar B. Zie figuur 1.

Tijdens de reis van de boot van A naar B en terug is de stroomsnelheid van de rivier constant. We noemen de stroomsnelheid v (in km/u).
Een voorbeeld: als $v = 5$, dan vaart de boot op de heenreis met een snelheid van 25 km/u ten opzichte van de oever en op de terugreis met een snelheid van 15 km/u ten opzichte van de oever.
De totale reistijd T van een retourtocht wordt gegeven door:

$$T = \frac{10}{20+v} + \frac{10}{20-v}$$

Hierbij is T in uren en v in km/u met $0 < v < 20$.

3p **1** ☐ Toon aan dat deze formule juist is.

3p **2** ☐ Bereken bij welke waarde van v de totale reistijd van een retourtocht 2 uur is. Geef je antwoord in twee decimalen nauwkeurig.

Als de stroomsnelheid van de rivier groter wordt, neemt de totale reistijd van een retourtocht toe.

6p **3** ☐ Toon dit aan met behulp van de formule van de afgeleide functie van T.

Veronderstel dat v varieert tussen 0 en 10 km/u en dat alle waarden van 0 tot en met 10 even vaak voorkomen. De gemiddelde reistijd kun je dan benaderen door T uit te rekenen voor $v = 0, v = \frac{1}{10}, v = \frac{2}{10}, v = \frac{3}{10},$ enzovoort tot en met $v = 10$ en van de reistijden het gemiddelde te nemen.

5p **4** ☐ Bereken de gemiddelde reistijd met deze benaderingswijze; geef je antwoord in minuten nauwkeurig.

Je kunt de gemiddelde reistijd ook uitrekenen met een integraal.
6p **5** ☐ Toon langs algebraïsche weg aan dat de gemiddelde reistijd gelijk is aan $\ln 3$ uur.

Maximumsnelheid

De snelheidsmeter van een auto geeft meestal niet precies aan wat de werkelijke snelheid is waarmee de auto rijdt. Voor een bepaald type snelheidsmeter geldt het volgende: als de snelheidsmeter een snelheid van v km/u aangeeft, is de waarde van de werkelijke snelheid normaal verdeeld, waarbij het gemiddelde gelijk is aan v en de standaardafwijking gelijk is aan 1,5% van dat gemiddelde.

Bij snelheidscontroles wordt een marge aangehouden van 3%. Dus bijvoorbeeld bij een maximumsnelheid van 100 km/u wordt er beboet bij snelheden van 103 km/u en hoger.

Van een auto is de snelheidsmeter van bovenstaand type. De bestuurder rijdt volgens de meter steeds met precies de toegestane maximumsnelheid.

Stel dat de toegestane maximumsnelheid 70 km/u is. De kans dat de werkelijke snelheid van de bestuurder zo groot is dat hij voor een boete in aanmerking komt, is dan, afgerond op drie decimalen, gelijk aan 0,023.

4p **6** □ Toon dit aan.

De kans dat hij in aanmerking komt voor een boete is voor elke toegestane maximumsnelheid even groot.

4p **7** □ Toon dit aan.

De bestuurder passeert in een jaar 200 keer een elektronisch bord dat waarschuwt wanneer men te hard rijdt, dat wil zeggen wanneer men de boetegrens overschrijdt. De kans dat de bestuurder voor een boete in aanmerking komt, is telkens 0,023.

4p **8** □ Bereken de kans dat de bestuurder van die 200 keer meer dan 2 keer gewaarschuwd wordt.

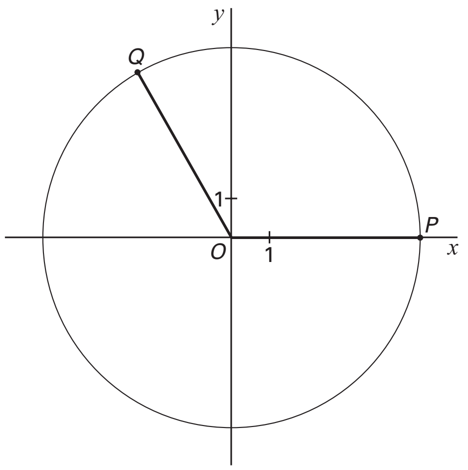
Achtervolging

Op tijdstip $t = 0$ beginnen de punten P en Q met een eenparige cirkelbeweging.
De bewegingsvergelijkingen zijn

voor $P: \begin{cases} x(t) = 5\cos\left(\frac{11}{10}t\right) \\ y(t) = 5\sin\left(\frac{11}{10}t\right) \end{cases}$ en voor $Q: \begin{cases} x(t) = 5\cos\left(t + \frac{2}{3}\pi\right) \\ y(t) = 5\sin\left(t + \frac{2}{3}\pi\right) \end{cases}$

Hierbij is t in seconden. In figuur 2 staat de beginsituatie getekend.

figuur 2



Tijdens de beweging wordt Q telkens door P ingehaald.

4p **9** ☐ Bereken na hoeveel seconden Q voor het eerst door P wordt ingehaald.

Het punt M is het midden van lijnstuk PQ. De coördinaten van M zijn $\left(\frac{x_P + x_Q}{2}, \frac{y_P + y_Q}{2}\right)$.

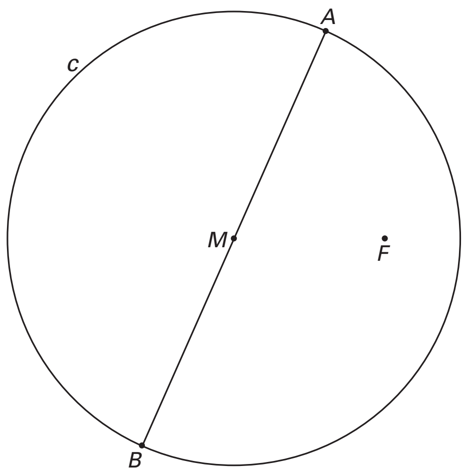
De bewegingsvergelijkingen van M zijn van de vorm $\begin{cases} x(t) = \varphi(t) \cdot \cos(at + b) \\ y(t) = \varphi(t) \cdot \sin(at + b) \end{cases}$

5p **10** ☐ Geef een formule voor φ uitgedrukt in t. Licht je antwoord toe.

Snijpunten met een ellips

In figuur 3 en op de uitwerkbijlage is een cirkel c getekend met middelpunt M en een middellijn AB.
Punt F is een punt binnen de cirkel c.
De conflictlijn van cirkel c en punt F is een ellips e.

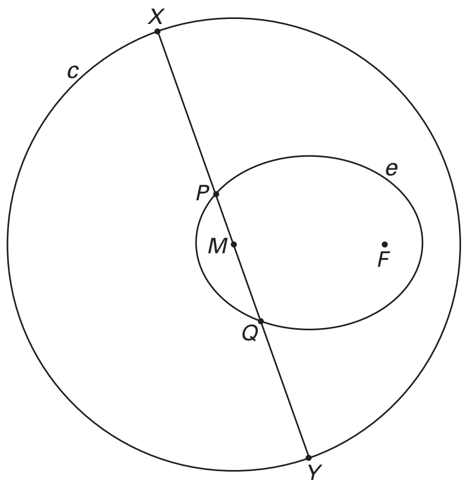
figuur 3



4p **11** □ Teken in de figuur op de uitwerkbijlage de snijpunten van deze ellips e en lijn AB. Licht je werkwijze toe.

In figuur 4 en op de uitwerkbijlage is cirkel c nogmaals getekend met M en F en ellips e.
Verder is een willekeurige middellijn XY getekend.
De snijpunten van de ellips e en de lijn XY zijn P en Q.

figuur 4



$\angle PFQ$ noemen we α en $\angle XFY$ noemen we β.

Tussen α en β bestaat het volgende verband: $\beta = \frac{1}{2}\alpha + 90°$.

5p **12** □ Bewijs dit.

Exponentiële functie

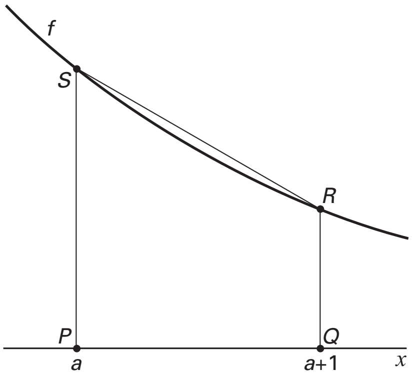
Gegeven is de functie $f(x) = e^{-x}$. Op de grafiek van f liggen de punten A en B met x-coördinaten $x_A = 0$ en $x_B = 1$.

Op de grafiek van f ligt een punt C waarin de raaklijn aan de grafiek van f evenwijdig is aan het lijnstuk AB.

5p **13** ☐ Bereken de x-coördinaat van C. Rond af op twee decimalen.

De lijn $x = a$ snijdt de x-as in P en de grafiek van f in S, de lijn $x = a + 1$ snijdt de x-as in Q en de grafiek van f in R. Het gebied begrensd door de grafiek van f en de lijnstukken PS, PQ en QR noemen we V. Het trapezium $PQRS$ noemen we W. Zie figuur 5.

figuur 5

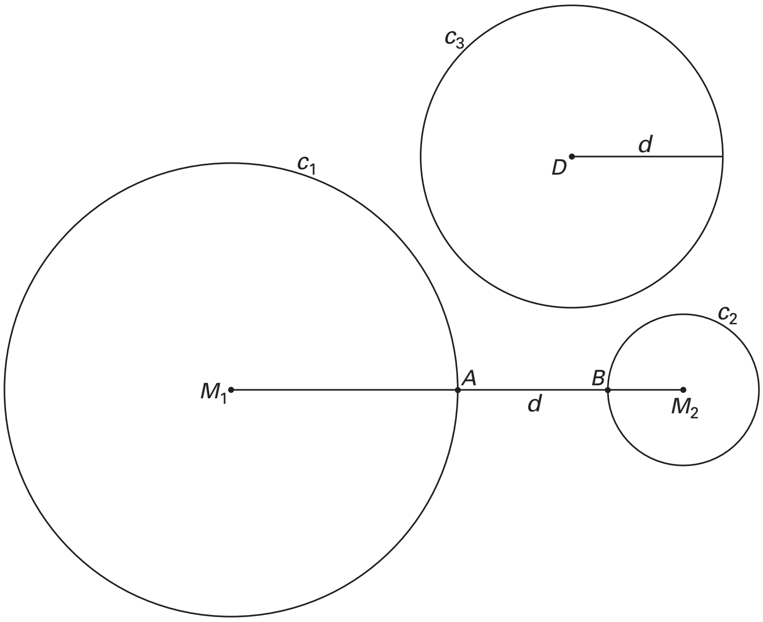


7p **14** ☐ Toon aan dat de verhouding $\dfrac{\text{oppervlakte van } W}{\text{oppervlakte van } V}$ onafhankelijk is van a.

Vijf punten op een cirkel

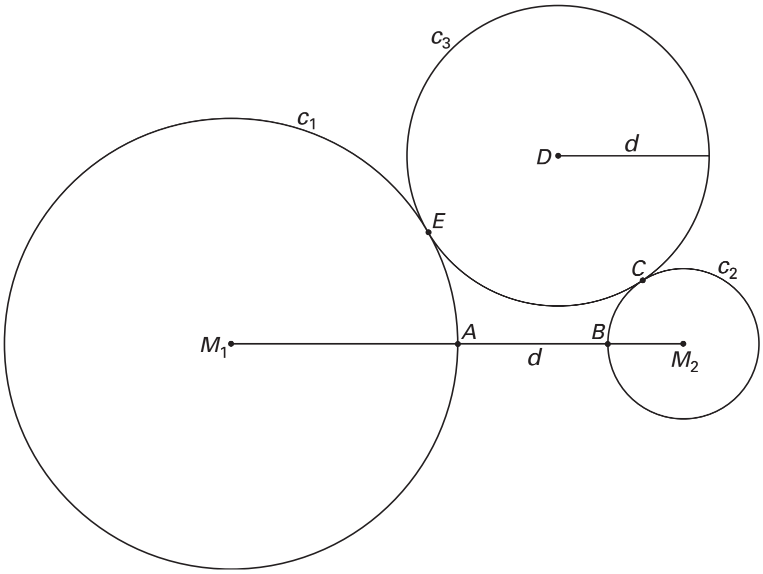
Gegeven zijn de cirkels c_1 en c_2 met middelpunten M_1 en M_2 en stralen r_1 en r_2 .
Cirkel c_1 is groter dan cirkel c_2 . Cirkel c_2 ligt geheel buiten cirkel c_1 .
Het verbindingslijnstuk M_1M_2 snijdt c_1 in punt A en c_2 in punt B. Zie figuur 6.
De lengte van lijnstuk AB is gelijk aan d. In figuur 6 is ook nog een derde cirkel c_3 getekend, met middelpunt D en straal d .

figuur 6



We plaatsen c_3 zo, dat hij c_1 en c_2 raakt. De raakpunten noemen we E en C.
Dan ligt het punt E op M_1D en het punt C op M_2D. Zie figuur 7.
Deze figuur staat ook vergroot op de uitwerkbijlage.

figuur 7



Vierhoek $ABDE$ is een koordenvierhoek.

6p **15** □ Toon dit aan.

4p **16** □ Bewijs dat de vijf punten A, B, C, D en E op één cirkel liggen.

Periodieke rijen

Een rij u_0, u_1, u_2, … noemen we periodiek met periode p als p het kleinste positieve gehele getal is waarbij voor alle waarden van n geldt dat $u_{n+p} = u_n$.
Een voorbeeld van een periodieke rij met periode 4 is de rij 1, 5, 16, 12, 1, 5, 16, 12, 1, 5, 16, 12, … .

Gegeven is een rij u_0, u_1, u_2, … waarvoor geldt:

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_1 = 7 \\ u_{n+2} = \dfrac{5}{u_n \cdot u_{n+1}} \quad (n = 0, 1, 2, 3, \ldots) \end{cases}$$

5p **17** ☐ Bereken u_{2005} .

We nemen in de bovengenoemde rij in plaats van 3 en 7 de startwaarden a en b. Dus $u_0 = a$ en $u_1 = b$.

4p **18** ☐ Bereken exact voor welke waarde van a en welke waarde van b de rij periode 1 heeft.

We kiezen weer $u_0 = 3$ en $u_1 = 7$.
We definiëren een bij de rij u_0, u_1, u_2, … horende productrij P_0, P_1, P_2, … als volgt:

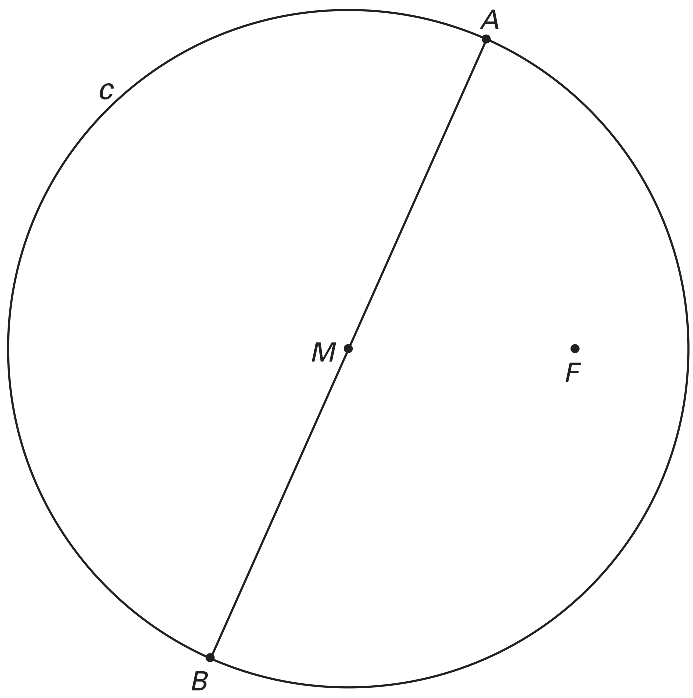
$$\begin{cases} P_0 = u_0 \\ P_1 = u_0 \cdot u_1 \\ P_2 = u_0 \cdot u_1 \cdot u_2 \\ \ldots \\ P_n = u_0 \cdot u_1 \cdot \ldots \cdot u_n \quad (n = 3, 4, 5, \ldots) \end{cases}$$

4p **19** ☐ Toon aan dat $P_{3k+1} = 21 \cdot 5^k$, voor elke positieve gehele waarde van k .

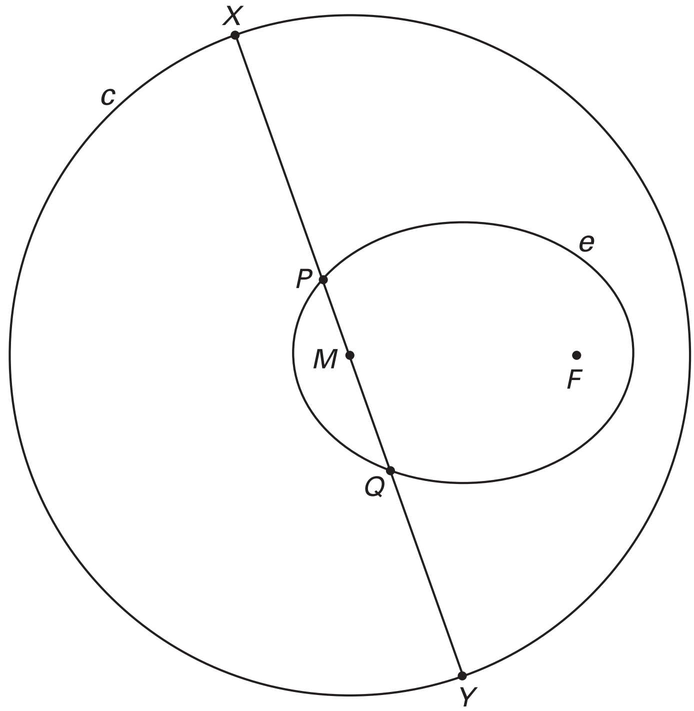
wiskunde B1,2

Uitwerkbijlage bij de vragen 11, 12, 15 en 16

Vraag 11

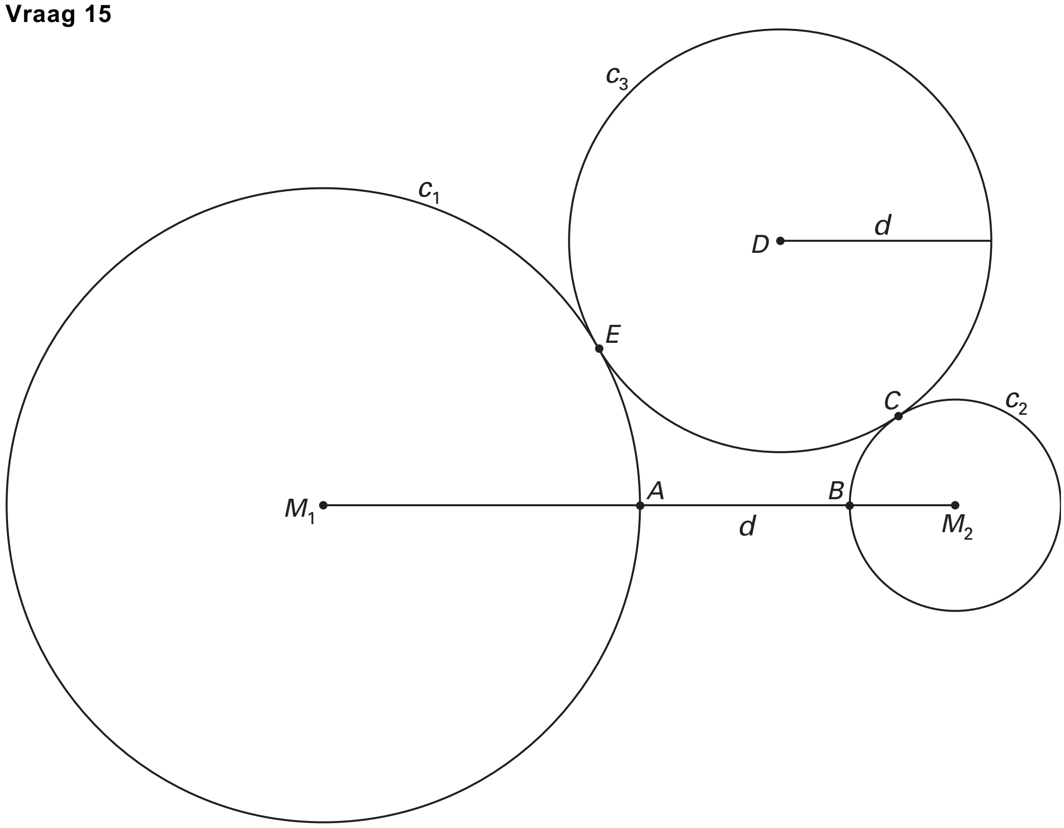


Vraag 12



Uitwerkbijlage bij de vragen 11, 12, 15 en 16

Vraag 15



Vraag 16