Goniometrische functies

13. Je wilt de volgende vergelijking oplossen:

$$\sin x + \sin(2x) = 0.$$

Als je naar deze vergelijking kijkt, zie je dat als je hem gaat proberen op te lossen, de $2x$ bij de tweede sinus een probleem gaat vormen. Je kunt die $2x$ echter weghalen met een verdubbelingsformule, namelijk $\sin(2a) = 2\sin a \cos a$. Je krijgt dan:

$$\begin{aligned} \sin x + 2\sin x\cos x &= 0, \\ \sin x\,(1 + 2\cos x) &= 0, \\ \sin x = 0 \bigvee 2\cos x &= -1. \end{aligned}$$

Tussen 0 en π geeft de optie $\sin x = 0$ de oplossingen $x = 0$ en $x = \pi$. De andere optie, $\cos x = -\frac{1}{2}$, geeft tussen 0 en π slechts 1 optie, namelijk $x = \frac{2}{3}\pi$. De x-coördinaat van punt B is dus $\frac{2}{3}\pi$.

14. Er doet zich een top voor als $f_a'(x) = 0$. Je rekent dus eerst $f_a'(x)$ uit. Hierbij gebruik je de kettingregel voor de tweede term. De afgeleide is:

$$f_a'(x) = \cos x + 2a \cdot \cos(2x)\,.$$

Nu wil je weten voor welke a geldt dat $f_a'(\frac{5}{6}\pi) = 0$, oftewel:

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{5}{6}\pi\right) + 2a \cdot \cos\left(2 \cdot \frac{5}{6}\pi\right) &= 0, \\ -\frac{1}{2}\sqrt{3} + 2a \cdot \frac{1}{2} &= 0, \\ a &= \frac{1}{2}\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Nu kun je $a = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ invullen in f_a. Dan krijg je:

$$f_{\frac{1}{2}\sqrt{3}} = \sin x + \frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot \sin(2x)\,.$$

Nu kun je met de GR de andere top van deze formule die tussen 0 en π ligt vinden. Op de Ti-84 plus voer je de volgende formule in:

$$y_1 = \sin x + \frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot \sin(2x)\,.$$

Als je nu kijkt naar de grafiek zie je dat de andere top een maximum is. Je kunt dus nu met calc maximum de x-coördinaat van de top uitrekenen. Je vindt dan $x = 0,96$.

15. De oppervlakte A onder de grafiek tussen 0 en π kun je uitrekenen met

de volgende integraal:

$$\begin{aligned}
A &= \int_0^\pi f(x)\,\mathrm{d}x, \\
&= \int_0^\pi \sin x + a \cdot \sin(2x)\ \mathrm{d}x, \\
&= \Big[-\cos x - \frac{a}{2} \cdot \cos(2x)\Big]_0^\pi, \\
&= \Big(-\cos\pi - \frac{a}{2} \cdot \cos(2\pi)\Big) - \Big(-\cos 0 - \frac{a}{2} \cdot \cos(2 \cdot 0)\Big), \\
&= \Big(1 - \frac{a}{2}\Big) - \Big(-1 - \frac{a}{2}\Big), \\
&= 2.
\end{aligned}$$

De oppervlakte onder de grafiek is dus altijd 2, en de oppervlakte is dus onafhankelijk van a.